

DOI: 10.24412/2222-5331-2024-82-91
УДК 168.0

Хлебалин Александр Валерьевич

***Ex absurdo quodlibet* и формальное представление релевантности**

Аннотация: В статье дана предварительная общая характеристика проблемы представления формально-логическими средствами релевантности неформально строгих рассуждений в математике. Показано, что релевантистская позиция в формализации математических утверждений традиционно предполагает отказ от вывода *ex absurdo quodlibet*. Отмечается, что теория натурального логицизма, основанная на системе Core Logic, допускает возможность совместимости принципа релевантизма и вывода *ex absurdo quodlibet*.

Ключевые слова: релевантная логика, неформальная строгость, core logic, натуральный логицизм, *ex absurdo quodlibet*.

Для цитирования: Хлебалин, А. В. (2024). *Ex absurdo quodlibet* и формальное представление релевантности. *Analytica*, 9, 82–91.

Исконно присущее математике стремление к абсолютной обоснованности результатов находило множество выражений: от аксиоматического представления знания, восходящего к Евклиду, до ставшего принципиальным вопроса о создании способов демонстрации обоснованности многообразной практики математического доказательства и получения «ясности» математического знания, ставшего чуть ли не навязчивой идеей математического сообщества на рубеже XIX–XX вв. Начиная с «кризиса оснований» математики этого периода времени, поиск оптимального и адекватного формализованного представления неформально строгих доказательств являлся неотъемлемым элементом обеспечения математики должными основаниями и придания математической практике надлежащей обоснованности.

Несмотря на тесную связь с различными философскими представлениями, роль формализации математического рассуждения как средствами, с одной стороны, обоснования, а с другой стороны, улучшения математической практики, неизменно признаётся и

сохраняется, независимо от различий в философских позициях. Результатом этого стало более тесная связь формальной логики с неформально строгим доказательством в математике, задача формализовать которое отходила к логике.

Формализация математического доказательства должна, прежде всего, обнаружить и удостоверить скрытую логическую строгость в неформально строгих утверждениях, которая, предположительно, – в случае, если утверждение действительно правильно, – содержится в нём в скрытом виде. Само это предприятие поднимает массу фундаментальных вопросов, например, о природе используемых при формализации логических средств, о критериях, которым должен удовлетворять полученный результат и т. д. Среди них особенно интересным нам представляется вопрос о формально-логических средствах представления такой связи между посылками и выводом в математическом доказательстве, как их релевантность.

Обсуждение этого вопроса, как правило, начинается с указания на то, что классическая логика, точнее, классическая концепция следования, непригодна для целей формального представления релевантности математических рассуждений: «Классическая логика определяет следование между посылкой (или множеством посылок) и заключением, если и только если их логическая форма гарантирует, что или посылка (или по крайней мере, один элемент из множества посылок) ложна, или заключение истинно. Эта дефиниция обязывает логика признавать определённые вырожденные выводы. Посылка (или множество посылок), являющаяся противоречивой в том смысле, что её логическая форма гарантирует её ложность (или, по крайней мере, ложность одного элемента из множества посылок), влечёт за собой любое заключение: *ex falso quodlibet*. А заключение, которое является тавтологичным в том смысле, что его логическая форма гарантирует, что оно истинно, следует из любой посылки (или множества посылок): *ex quolibet verum*» (Burgess, 2005, 727). Главной претензией сторонников реформы классической логики в целях её «релевантизации» является то, что она санкционирует в качестве корректных явно нерелевантные выводы: «Действительно, теория следования в классической логике была в значительной степени разработана для того, чтобы проанализировать, что подразумевается под строгим доказательством или строгой доказуемостью в ортодоксальной математике: классическую логику можно рассматривать в качестве попытки эксплицитного описания имплицитных норм ортодоксальных математиков, и в основном

именно математическая практика будет приводиться в её защиту» (Burgess, 2005, 728).

Универсальным для любого сторонника позиции релевантизма является отрицание дизъюнктивного силлогизма (*DS*):

$$\frac{p \vee q}{\sim p} \\ \hline q$$

Классическая формулировка релевантистской позиции представлена А. Андерсоном и Н. Белнапом (Anderson & Belnap, 1975). У релевантизма имеется множество формулировок, но коль скоро его всестороннее исследование не является нашей задачей сейчас, ограничимся обращением исключительно к указанной позиции как к классической и наиболее известной формулировке релевантизма. А. Андерсон и Н. Белнап прямо не отрицают *DS*. Его отрицание является косвенным, основанным на предшествующем отрицании в качестве релевантного вывода *ex absurdo quodlibet* (*EAQ*):

$$\frac{p}{\sim p} \\ \hline q$$

Их возражение против *EAQ* основано на том, что общезначимость схемы

$$\frac{A_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n}{B}$$

зависит от двух факторов: (1) не должно быть ни одного случая, когда все посылки были бы истинными, а заключение ложным; (2) посылки должны быть «релевантными» по отношению к заключению. А. Андерсон и Н. Белнап не утверждают, что *EAQ* нарушает требование сохранения истины (1), поскольку это означало бы утверждение, что могут быть истинные противоречия, тогда как они

признают, что «только непротиворечивая и полная теория является той, что может точно соответствовать тому, каков мир» (Anderson & Belnap, 1975, 402); скорее, они обвиняют *EAQ* в нарушении требования «релевантности» (2).

Релевантная логика Андерсона – Белнапа была подвергнута серьёзной критике со стороны Дж. Бёрджеса. (Burgess, 1981; 1983; 1985). Мы не будем останавливаться здесь на деталях этой критики, отошлём к его известной полемике с К. Мортенсенем и С. Ридом на страницах *Notre Dame Journal of Formal Logic*. Привлекает внимание убеждённость, высказанная Дж. Бёрджесом при первом же обсуждении релевантистского подхода в том, что любая разновидность формулировок этой позиции буквально обречена на отрицание *EAQ* и *DS*. Отказ релевантиста признавать эти выводы часто характеризуется как «ограбление» математики. Например, Дж. Бёрджес так характеризует цену, которую математика должна заплатить релевантисту: «Стандартные математические аргументы не могут быть формализованы релевантно <...> Для половины самых известных теорем элементарной теории чисел (включая теорему о том, что каждое целое число является суммой четырех квадратов), по всей видимости, неизвестно ни одного релевантно приемлемого доказательства, несмотря на все работы Мейера. Для другой половины самых известных теорем элементарной теории чисел (включая теорему о том, что ни один куб не является суммой двух кубов) имеются релевантистские доказательства, но их нельзя рассматривать как формализацию стандартных доказательств. Они включают в себя оговорки вида "если только $0 = 1$ ", которые никто никогда не услышал бы из уст Ферма, Эйлера, Лагранжа, Гаусса или Луисвилля, и устранение этих оговорок в конце доказательства различными манипуляциями. Манипуляции Мейера, несомненно, находчивы, но сама необходимость проявлять такую находчивость демонстрирует, что релевантность противоречит стандартной математической практике. Кажется, что релевантист *должен быть* ревизионистом, по крайней мере, в том, что касается математики» (Burgess, 1985, 222–223).

В результате развернувшейся в *Notre Dame Journal of Formal Logic* (Burgess, 1981; 1983; 1985; Mortensen, 1983; Read, 1983) дискуссии о перспективах релевантистского проекта формализации математических рассуждений, пусть и велись они вокруг именно проекта Андерсона – Белнапа, общим местом было признание несовместимости принципа релевантности с допустимостью *EAQ* и *DS* в качестве приемлемых выводов. Но здесь мы должны обратить внимание на появившееся, – точнее, ещё находящееся в процессе

окончательной формулировки, – новое направление в философии математики, отличительной чертой которого, в связи с интересующим нас здесь вопросом, является совмещение позиции релевантизма с признанием *EAQ* и *DS* в качестве допустимых и оправданных выводов в математике. Данный подход построен на т. н. системе *Core Logic*, разрабатываемой Н. Теннантом с 1979 г. (Tennant, 1978; 1979; 2017).

Логической системой, ставшей в результате своего дальнейшего развития системой *Core Logic*, была интуиционистская релевантная логика, преследовавшая целью реформу классической логики в двух направлениях: её конструктивизации и релевантизации. Конструктивизация классической логики приводит к созданию интуиционистской логики (**I**). Релевантизация интуиционистской логики впервые была предложена в 1936 г. И. Джохансоном как минимальная логика (**M**). Система **M** состояла только из правил введения и исключения для логических операторов в их оригинальной формулировке, представленной Г. Генценом. Добавление *EFQ* (*ex contradictione quodlibet*) в **M** приводит к системе **I**. Добавление классических правил для отрицания (элиминации двойного отрицания, исключённого третьего, правило дилеммы, классическое *reductio ad absurdum*) приводит к системе классической логики **C**.

Н. Теннант убеждён, что необходима дальнейшая «релевантизация» интуиционистской логики, потому что она не была должным образом завершена, и что **M** не следует воспринимать как достигшую этой цели. С его точки зрения, причиной этого является неудовлетворительный выбор Г. Генценом формулировки *Ur*-правил введения и исключения. Исправление ситуации предлагает *Core Logic*.

Core Logic содержит только примитивные правила вывода, которые непосредственно задают значения логических операторов. При этом не имеет значения, представлена ли *Core Logic* как система натурального вывода или как исчисление секвенций. Её правила введения (в натуральном выводе) на самом деле являются правыми логическими правилами исчисления секвенций для введения логических операторов справа от двоеточия, а правила исключения (в натуральном выводе) являются левыми правилами исчисления секвенций для введения логических операторов слева от двоеточия. Это упрощает трактовку соотношения исчисления секвенций и натурального вывода по сравнению с генценовским вариантом. Основные доказательства в исчислении секвенций изоморфны доказательствам в системе натурального вывода. *Core Logic* точно фиксирует аналитически общезначимые (*valid*) выводы. Ей не требуются структурные правила перестановки и сокращения, которые

относятся только к тем формулировкам исчислений секвенций, чьи секвенции $\Delta : \varphi$ в качестве антецедентов имеют секвенции Δ посылок. Что ещё более важно, как отмечает Н. Теннант, исчисление секвенций для *Core Logic* не содержит в качестве правил, которые могут применяться при построении доказательств, структурные правила ослабления и сечения, используемые Г. Генценом (Tennant, 2016). В отличие от логики Андерсона – Белнапа, в которой релевантизация вывода достигается путём изменения правил условной связки « \rightarrow », в *Core Logic* гарантия релевантности между сложным утверждением и его конститuentами переносится непосредственно на уровень метаязыка (метаязыкового отношения выводимости), где заключения могут быть получены из посылок любой сложности способом, обеспечивающим «подлинно релевантное отношение» между посылками и заключением.

Сам проект является невероятно амбициозным и многообещающим развитием логицизма, названный автором Натуральным логицизмом. Система *Core Logic*, являющаяся интуиционистской релевантной логикой, согласно её автору, разработана для достижения наиболее фундаментальной цели Г. Фреге при разработке формальной логики: «Предоставить успешно проверяемые доказательства, которые устанавливают истинность математических теорем с той же степенью уверенности, с какой мы заявляем об истинности математических аксиом, использующихся в этих доказательствах в качестве посылок. Мы нацелены на то, чтобы учесть *все* эти математические теоремы. В этих фундаментальных отношениях *ни одна* из систем Андерсона – Белнапа релевантной логики не проходит эпистемологическую проверку. *Ни в одной* из них нет метатеоремы о том, что каждое логическое следствие выполнимого множества математических аксиом первого порядка может быть установлено в качестве теоремы на основе этих аксиом с помощью рассматриваемой первопорядковой системы релевантной логики. Напротив, в системах *Core Logic* такие метатеоремы действительно есть» (Tennant, 2024, 184).

Проблема представления формально-логическими средствами релевантности как неотъемлемой характеристики неформально строгих математических рассуждений не являлась первоочередной проблемой при разработке *Core Logic*, как могло бы показаться¹. Скорее, возможность предложить решение этой проблемы в рамках программы является ещё одним свидетельством её жизнеспособности

¹ Такое мнение высказал, например, Ж. Видал-Россет (Vidal-Rosset, 2017).

и очевидным достоинством, в том числе не только как программы оснований математики, но и как релевантистского направления как такового.

Сказанное является не более, чем предварительной характеристикой проблемы формально-логического представления релевантности математических рассуждений, предложить которую было необходимо прежде, чем углубляться в концептуальные и формально-логические детали совместимости принципа релевантности и *EAQ* в системе *Core Logic* и в Натуральном логицизме. Подробный философский анализ этого решения будет представлен в следующих работах по указанной тематике.

Список литературы

- Anderson, A. & Belnap N. D. (1975). *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Vol. I. Princeton: Princeton University Press.
- Burgess, J. P. (1981). Relevance: A Fallacy? *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 22(2), 97–104.
- Burgess, J. P. (1983). Common Sense and «Relevance». *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(1), 41–53.
- Burgess, J. P. (1985). Read of Relevance: A Rejoinder. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 25(3), 217–223.
- Burgess, J. P. (2005). No Requirement of Relevance. In A. Shapiro (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic (727–750)*. Oxford: Oxford University Press.
- Mortensen, C. (1983). The Validity of Disjunctive Syllogism Is Not So Easily Proved. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(1), 35–40.
- Read, S. (1983). Burgess on Relevance: A Fallacy Indeed. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(4), 473–481.
- Tennant, N. (1978). *Natural Logic*. Edinburgh: Edinburgh University Press.
- Tennant, N. (1979). Entailment and Proofs. *Proceedings of the Aristotelian Society*, 79(1), 167–189.
- Tennant, N. (2016). Rule-Irredundancy and the Sequent Calculus for Core Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 57(1), 105–125.
- Tennant, N. (2017). *Core Logic*. Oxford: Oxford University Press.
- Tennant, N. (2024). The Logic for Mathematics without *Ex Falso Quodlibet*. *Philosophia Mathematica*, 32(2), 177–215.
- Vidal-Rosset, J. (2017). Why Intuitionistic Relevant Logic Cannot Be a Core Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 58(2), 241–248.

Информация об авторе: Хлебалин Александр Валерьевич, старший научный сотрудник Института философии и права Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск, sasha_khl@mail.ru.

Поступила в редакцию: 16 декабря 2024 г.

Принята к публикации: 30 декабря 2024 г.

Опубликована: 31 декабря 2024 г.

Khlebalin Aleksandr Valerievich

***Ex Absurdo Quodlibet* and the Formal Presentation of Relevance**

Abstract: The article provides a preliminary overview of the problem of representing the relevance of informally rigorous reasoning in mathematics by formal logical means. It demonstrates that the relevantist approach to the formalization of mathematical statements traditionally assumes the rejection of the *ex absurdo quodlibet* inference. Also, it states that the theory of natural logicism, based on the Core Logic system, allows for the compatibility between the principle of relevance and the *ex absurdo quodlibet* inference.

Keywords: relevant logic, informal rigor, core logic, natural logicism, *ex absurdo quodlibet*.

Citation: Khlebalin, A. V. (2024). *Ex Absurdo Quodlibet* and the Formal Presentation of Relevance. *Analytica*, 9, 82–91.

References

- Anderson, A. & Belnap N. D. (1975). *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*. Vol. I. Princeton: Princeton University Press.
- Burgess, J. P. (1981). Relevance: A Fallacy? *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 22(2), 97–104.
- Burgess, J. P. (1983). Common Sense and «Relevance». *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(1), 41–53.
- Burgess, J. P. (1985). Read of Relevance: A Rejoinder. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 25(3), 217–223.
- Burgess, J. P. (2005). No Requirement of Relevance. In A. Shapiro (ed.) *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (727–750). Oxford: Oxford University Press.
- Mortensen, C. (1983). The Validity of Disjunctive Syllogism Is Not So Easily Proved. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(1), 35–40.
- Read, S. (1983). Burgess on Relevance: A Fallacy Indeed. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24(4), 473–481.
- Tennant, N. (1978). *Natural Logic*. Edinburgh: Edinburgh University Press.
- Tennant, N. (1979). Entailment and Proofs. *Proceedings of the Aristotelian Society*, 79(1), 167–189.

Tennant, N. (2016). Rule-Irredundancy and the Sequent Calculus for Core Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 57(1), 105–125.

Tennant, N. (2017). *Core Logic*. Oxford: Oxford University Press.

Tennant, N. (2024). The Logic for Mathematics without *Ex Falso Quodlibet*. *Philosophia Mathematica*, 32(2), 177–215.

Vidal-Rosset, J. (2017). Why Intuitionistic Relevant Logic Cannot Be a Core Logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 58(2), 241–248.

Authors Information: Khlebalin Aleksandr Valerievich, Senior Researcher, Institute of Philosophy and Law of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, sasha_khl@mail.ru.

Received: 16 December 2024

Accepted: 30 December 2024

Published: 31 December 2024