DOI: 10.24412/2222-5331-2023-90-103
УДК 164.3

Мухаметшина Индира Искандаровна

Выразительные возможности λ-оператора и поссибилистских кванторов в модальных логиках первого порядка

Аннотация: В статье сравниваются выразительные возможности двух языков первопорядковой модальной логики: первый содержит λ-оператор и актуалистские кванторы, а второй не содержит λ-оператор, но содержит два вида кванторов (актуалистские и поссибилистские) и предикат равенства. Предложен перевод с первого языка на второй, сохраняющий истинностное значение, и показано, что обратного перевода не существует. Тем самым показано, что второй язык превосходит первый по выразительной силе.

Ключевые слова: первопорядковая модальная логика, *de re*, λ-оператор, поссибилистские кванторы.

Для цитирования: Мухаметшина, И. И. (2023). Выразительные возможности λ-оператора и поссибилистских кванторов в модальных логиках первого порядка. *Analytica*, *8*, 90–103.

1. Введение

Средств языка первопорядковой модальной логики, не содержащего λ-оператора или поссибилистских кванторов, не достаточно для формализации прочтений *de re* таких предложений как, например, «число планет необходимо больше семи». Формализация предложения «число планет необходимо больше семи» как $\Box(n > 7)$, где n – число планет, $\Box$ – оператор необходимости и $>$ понимается как в арифметике, отражает только прочтение *de dicto*. Для формализации, отражающей прочтение *de re*, требуется язык, обладающий большей выразительной силой.

То, как с этой проблемой справляется язык первопорядковой модальной логики с λ-оператором, показано в книге М. Фиттинга и

Р. Л. Мендельсона «First-order modal logic» (Fitting M., 1998, С.187–202). В данной статье показано, что с названной проблемой может справиться язык первопорядковой модальной логики без λ-оператора, но с двумя видами кванторов и предикатом равенства. Задачей статьи является доказательство того факта, что язык первопорядковой модальной логики с двумя видами кванторов и предикатом равенства превосходит по выразительной силе язык первопорядковой модальной логики с λ-оператором.

2. Язык $\mathcal{L}_1$, язык $\mathcal{L}_2$ и семантики для этих языков

В этом разделе дано описание двух языков, $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, на которых можно построить некоторые первопорядковые модальные логики. Основное отличие этих языков друг от друга заключается в том, что в вокабуляре $\mathcal{L}_1$ присутствует λ-оператор и отсутствует поссибилистский квантор Π и наоборот, в $\mathcal{L}_2$ есть Π, но нет λ-оператора. Множества переменных, предикатных, константных и функциональных символов в вокабулярах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ равны, поэтому, вместо «переменная языка $\mathcal{L}_1$» и «переменная языка $\mathcal{L}_2$» будем говорить просто «переменная»; также для предикатных, константных и функциональных символов.

2.1 Язык $\mathcal{L}_1$

Вокабуляр языка $\mathcal{L}_1$. Множество примитивных символов языка $\mathcal{L}_1$ включает в себя:

1) множество логических связок $\{\neg, \rightarrow\}$;
2) множество модальных операторов $\{\Box\}$;
3) множество кванторов $\{\forall\}$;
4) $\{\lambda\}$, (λ – лямбда-оператор);
5) бесконечное множество предикатных символов, имеющих форму P^n_k, где n – местность, $n \geq 1$, $k \geq 1$;
6) бесконечное множество функциональных символов, имеющих форму f^n_k, где n – местность, $n \geq 1$, $k \geq 1$;
7) бесконечное множество переменных: $x_1, x_2, \ldots$;
8) бесконечное множество константных символов: $c_1, c_2, \ldots$;
9) множество технических символов: $\{(,), , \}$.

Примечания к вокабуляру языка $\mathcal{L}_1$.

- Для удобства, в качестве предикатных символов будут использоваться заглавные латинские буквы, местность которых либо указана, либо определяется из контекста; в качестве функциональных символов будут использоваться строчные латинские буквы, чаще всего f, g, h, местность которых либо указана, либо определяется из контекста. Также, в качестве переменных будут использоваться строчные латинские буквы, чаще всего x, y, z; в качестве константных символов будут использоваться строчные латинские буквы, чаще всего a, b, c.

- Вместо предикатного символа P_1^2 мы будем использовать символ равенства «=». Символ $=$ будет использоваться также как метаязыковой символ для обозначения равенства. Из контекста всегда будет ясно в каком смысле использовано равенство.

Определение 2.1.1 [Терм[1]] Множество термов определяется индуктивно с использованием формы Бэкуса-Наура следующим образом:

$$t ::= x \mid a \mid f(t_1, \ldots, t_n),$$

где x – переменная, a – константа, f – n-местный функциональный терм, t – терм.

Определение 2.1.2 [Атомарная формула языка $\mathcal{L}_1$] Если P является n-местным предикатным символом и $x_1, \ldots, x_n$ – переменные, то $P(x_1, \ldots, x_n)$ – атомарная формула языка $\mathcal{L}_1$.

Заметим, что атомарные формулы языка $\mathcal{L}_1$ не могут содержать константы и функциональные термы, т. е., например, если c – константа, P – предикат, то $P(c)$ не является атомарной формулой.

Определение 2.1.3 [Множество формул языка $\mathcal{L}_1$] Множество формул языка $\mathcal{L}_1$, определяется индуктивно с использованием формы Бэкуса-Наура, следующим образом:

$$\Phi ::= P(x_1, \ldots, x_n) \mid (\neg\, \Phi) \mid (\Phi_1 \to \Phi_2) \mid (\Box\, \Phi) \mid (\forall x \Phi) \mid (\langle \lambda x. \Phi \rangle(t)),$$

где P – n-местный предикатный символ, t – терм, $x, x_1, \ldots, x_n$ – переменные, Φ – формула.

Нотационная конвенция. $\mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ – множество формул языка $\mathcal{L}_1$.

Конвенция о скобках. Внешние скобки в формулах не пишутся. Пример: выражение $\Phi \to (\Psi \to \Omega)$ следует читать как формулу $(\Phi \to (\Psi \to \Omega))$.

Нотационная конвенция. Связки $\&, \vee$ определяются через $\neg, \to$, оператор $\Diamond$ определяется через $\Box$ и квантор $\exists$ определяется через $\forall$ следующим образом: для любых $\Phi, \Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ и переменной x,

[1] Поскольку множества переменных, предикатных, константных и функциональных символов в вокабулярах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ равны, множество термов $\mathcal{L}_1$ равно множеству термов $\mathcal{L}_2$. Поэтому вместо «терм $\mathcal{L}_1$» и «терм $\mathcal{L}_2$» будем говорить «терм».

- $\varPhi \,\&\, \varPsi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\,(\varPhi \to \neg\,\varPsi)$;
- $\varPhi \vee \varPsi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\,\varPhi \to \varPsi$;
- $\Diamond\varPhi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\Box\neg\varPhi$;
- $\exists x\,\varPhi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\,\forall x \neg\,\varPhi$.

Конвенция о приоритете связок. $\&$ и $\vee$ имеют приоритет перед $\to$. Пример: выражения вида $\varPhi \,\&\, \varPsi \to \varOmega$ читаются как $(\varPhi \,\&\, \varPsi) \to \varOmega$.

2.2 Язык $\mathcal{L}_2$

Вокабуляр языка $\mathcal{L}_2$. Пусть $PS(\mathcal{L}_1)$ – множество примитивных символов языка $\mathcal{L}_1$. Множество примитивных символов языка $\mathcal{L}_2$ равно $(PS(\mathcal{L}_1) - \{\lambda\}) \cup \{\Pi\}$ (Π – поссибилистский квантор).

Примечания к вокабуляру языка $\mathcal{L}_2$ аналогичны примечаниям к вокабуряру языка $\mathcal{L}_1$.

Множество термов $\mathcal{L}_2$ равно множеству термов $\mathcal{L}_1$.

Определение 2.2.1 [Атомарная формула языка $\mathcal{L}_2$] Если P является n-местным предикатным символом и $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то $P(t_1, \ldots, t_n)$ – атомарная формула.

В отличие от языка $\mathcal{L}_1$, в языке $\mathcal{L}_2$ атомарные формулы *могут* содержать константы и функциональные термы.

Определение 2.2.2 [Множество формул языка $\mathcal{L}_2$] Множество формул языка $\mathcal{L}_2$, определяется рекурсивно с использованием формы Бэкуса-Наура, следующим образом:

$$\varPhi ::= P(t_1, \ldots, t_n) \mid (\neg\, \varPhi) \mid (\varPhi_1 \to \varPhi_2) \mid (\Box\, \varPhi) \mid (\forall x \varPhi) \mid (\Pi x \varPhi),$$

где P – n-местный предикатный символ, x – переменная, $t_1, \ldots, t_n$ – термы, $\varPhi$ – формула.

Нотационная конвенция. $\mathbb{F}(\mathcal{L}_2)$ – множество формул языка $\mathcal{L}_2$.

Связки $\&$, $\vee$ определяются через $\neg$, $\to$, квантор $\exists$ определяется через $\forall$ (так же как для языка $\mathcal{L}_1$) и квантор Σ определяется через Π следующим образом: для любой формулы $\varPhi$ и переменной x,

$$\Sigma x \varPhi \stackrel{\text{def}}{=} \neg\,\Pi x \neg\,\varPhi.$$

Конвенции относительно скобок аналогичны конвенциям относительно скобок для языка $\mathcal{L}_1$.

2.3 Семантика языка $\mathcal{L}_1$

Определение 2.3.1 [Фрейм с переменным доменом (фрейм)] Фрейм – это упорядоченная тройка $\langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D} \rangle$, где $\mathcal{G}$ – непустое множество (множество возможных миров), $\mathcal{R}$ – бинарное отношение (отношение достижимости) на $\mathcal{G}$, т. е. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$ – доменная функция, т .е. функция от миров к непустым множествам.

Определение 2.3.2 [Домен мира] Для любого $\mathit{\Gamma} \in \mathcal{G}$, $\mathcal{D}(\mathit{\Gamma})$ – домен $\mathit{\Gamma}$.

Определение 2.3.3 [Домен фрейма] Пусть $\mathcal{F} = \langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D} \rangle$ – фрейм. Домен фрейма обозначается $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ и равен $\bigcup\{\mathcal{D}(\mathit{\Gamma}) : \mathit{\Gamma} \in \mathcal{G}\}$.

Определение 2.3.4 [Нежесткая интерпретация (интерпретация)] Интерпретацией во фрейме $\mathcal{F} = \langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D} \rangle$ называется функция $\mathcal{I}$, такая что:

1) для любого $n \geq 1$, каждому n-местному предикатному символу P и каждому $\mathit{\Gamma} \in \mathcal{G}$ $\mathcal{I}$ назначает некоторое n-местное отношение на домене фрейма;
2) каждому константному символу c и каждому $\mathit{\Gamma} \in \mathcal{G}$ $\mathcal{I}$ назначает некоторый элемент домена фрейма, т. е. $\mathcal{I}(c, \mathit{\Gamma}) \in \mathcal{D}(\mathcal{F})$;
3) для любого $n \geq 1$, каждому n-местному функциональному символу f и каждому $\mathit{\Gamma} \in \mathcal{G}$ $\mathcal{I}$ назначает некоторую n-местную операцию на домене фрейма, т. е.

$$\mathcal{I}(f, \mathit{\Gamma}) : \mathcal{D}(\mathcal{F})^n \to \mathcal{D}(\mathcal{F}).$$

Определение 2.3.5 [Нормальная нежесткая модель с переменным доменом (модель)] Модель – это упорядоченная четверка $\langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{I} \rangle$, где $\langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D} \rangle$ – фрейм и $\mathcal{I}$ – нежесткая интерпретация в $\langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D} \rangle$, такая что для каждого $\mathit{\Gamma} \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}(=, \mathit{\Gamma})$ – диагональ домена модели $\mathcal{M}$, $\mathbb{D}_{\mathcal{D}(\mathcal{M})}$.[2]

Определение 2.3.6 [Домен модели] Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{I} \rangle$ – модель. Домен модели обозначается $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ и равен $\bigcup\{\mathcal{D}(\mathit{\Gamma}) : \mathit{\Gamma} \in \mathcal{G}\}$, т. е. домен модели равен домену фрейма, на котором она базируется.

Определение 2.3.7 [Означивание переменных в модели] Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{I} \rangle$ – модель. Означивание переменных в модели $\mathcal{M}$ – это функция v, назначающая каждой переменной x некоторый элемент $v(x)$ домена модели $\mathcal{D}(\mathcal{M})$.

Определение 2.3.8 [Вариант означивания] Для любого $\mathit{\Gamma} \in \mathcal{G}$, любой переменной x, любого означивания v и любого $e \in \mathcal{D}(\mathit{\Gamma})$ означивание v_x^e называется x-вариантом означивания v если v_x^e и v согласны

[2] Для любого множества A, $\mathbb{D}_A = \{(a,a) : a \in A\}$.

относительно всех переменных, кроме, возможно, x (т. е. для любой переменной y, кроме, возможно, x, $v^e_x(y) = v(y)$) и $v^e_x(x) = e$.

Определение 2.3.9 [Денотация терма] Пусть $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, $\Gamma \in \mathcal{G}$ и пусть v – означивание в $\mathcal{M}$. Для любого $\Gamma \in \mathcal{G}$ и любого терма t, денотат t в Γ обозначается $v\mathcal{I}(t, \Gamma)$ и определяется следующим образом:

1) если t – переменная, то $v\mathcal{I}(t, \Gamma) = v(t)$;
2) если t – константный символ, то $v\mathcal{I}(t, \Gamma) = \mathcal{I}(t, \Gamma)$;
3) если f – n-местный функциональный символ и $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то

$$v\mathcal{I}(f(t_1,\ldots,t_n), \Gamma) = \mathcal{I}(f, \Gamma)(v\mathcal{I}(t_1, \Gamma),\ldots,v\mathcal{I}(t_n, \Gamma)).$$

Определение 2.3.10 [Истинность формулы $\mathcal{L}_1$ в некотором мире модели при некотором означивании переменных (истинность-1)]. Определим отношение истинности ($\vDash^1$) и ложности ($\nvDash^1$) между моделями, мирами, означиваниями переменных и формулами языка $\mathcal{L}_1$, так что, если $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$ – модель, Γ – возможный мир, v – означивание переменных в $\mathcal{M}$ и $\Phi, \Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$, то:

1) если P является n-местным предикатным символом и $x_1, \ldots, x_n$ – переменные, то $\mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_v P(x_1, \ldots, x_n) \iff \langle (v)(x_1), \ldots, (v)(x_n) \rangle \in \mathcal{I}(P, \Gamma)$;[3]
2) $\mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_v \neg \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \nvDash^1_v \Phi$;
3) $\mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_v \Phi \to \Psi \iff \mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_v \Phi \Rightarrow \mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_v \Psi$;
4) $\mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_v \Box \Phi \iff \forall \Delta (\Delta \in \mathcal{G} \,\&\, \Gamma \mathcal{R} \Delta \Rightarrow \mathcal{M}, \Delta \vDash^1_v \Phi)$;
5) $\mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_v \forall x \Phi \iff \forall e (e \in \mathcal{D}(\Gamma) \Rightarrow \mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_{v^e_x} \Phi)$;
6) для любого терма t, $\mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_v \langle \lambda x. \Phi \rangle (t) \iff \mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_{v_x^{v\mathcal{I}(t,\Gamma)}} \Phi$.

2.4 Семантика языка $\mathcal{L}_2$

Дефиниции фрейма, домена мира, домена фрейма, интерпретации, модели, домена модели, означивания и варианта означивания, денотации терма такие же как в описании семантики для языка $\mathcal{L}_1$. Семантика $\mathcal{L}_2$ отличается от семантики $\mathcal{L}_1$ определением истинности.

Определение 2.4.1 [Истинность формулы $\mathcal{L}_2$ в некотором мире модели при некотором означивании переменных (истинность-2)] Определим отношение истинности ($\vDash^2$) и ложности ($\nvDash^2$) между моделями, ми-

---

[3] Здесь и далее квантор $\forall$ и связка $\&$ используются и как объектные, и как метаязыковые символы. $\Rightarrow$ и $\iff$ используются как метаязыковые символы. «$\Phi \Rightarrow \Psi$» следует читать как «Φ имплицирует Ψ»; $\Phi \iff \Psi$ – «Φ если и только если Ψ».

рами, означиваниями переменных и формулами языка $\mathcal{L}_2$, так что, если $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{I} \rangle$ – модель, Γ – возможный мир, v – означивание переменных в $\mathcal{M}$ и $\Phi, \Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_2)$, то:

1) Если P является n-местным предикатным символом и $t_1, \ldots, t_n$ – термы, то $\mathcal{M},\Gamma \vDash_v^2 P(t_1, \ldots, t_n) \iff \langle v\mathcal{I}(t_1,\Gamma), \ldots, v\mathcal{I}(t_n,\Gamma) \rangle \in \mathcal{I}(P, \Gamma)$;
2) $\mathcal{M},\Gamma \vDash_v^2 \neg \Phi \iff \mathcal{M},\Gamma \nvDash_v^2 \Phi$;
3) $\mathcal{M},\Gamma \vDash_v^2 \Phi \to \Psi \iff \mathcal{M},\Gamma \vDash_v^2 \Phi \Rightarrow \mathcal{M},\Gamma \vDash_v^2 \Psi$;
4) $\mathcal{M},\Gamma \vDash_v^2 \Box \Phi \iff \forall \Delta(\Delta \in \mathcal{G} \,\&\, \Gamma\mathcal{R}\Delta \Rightarrow \mathcal{M},\Delta \vDash_v^2 \Phi)$;
5) $\mathcal{M},\Gamma \vDash_v^2 \forall x\Phi \iff \forall e(e \in \mathcal{D}(\Gamma) \Rightarrow \mathcal{M},\Gamma \vDash_{v_x^e}^2 \Phi)$;
6) $\mathcal{M},\Gamma \vDash_v^2 \Pi x\Phi \iff \forall e(e \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \Rightarrow \mathcal{M},\Gamma \vDash_{v_x^e}^2 \Phi)$.

Отметим, что из определения истины следует, что для любой модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{I} \rangle$, любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, любого означивания v переменных в модели $\mathcal{M}$, для любых термов t_1, t_2,

$$\mathcal{M},\Gamma \vDash_v^2 t_1 = t_2 \iff (v\mathcal{I})(t_1, \Gamma) = (v\mathcal{I})(t_2, \Gamma).$$

Этот факт нам пригодится ниже.

Нотационная конвенция. Для любой формулы Φ (языка $\mathcal{L}_1$ или языка $\mathcal{L}_2$) и любых переменных x, y, Φ_x^y – результат замены всех свободных вхождений переменной x вхождениями переменной y.

В дальнейшем нам пригодится еще один факт, справедливый как для семантики языка $\mathcal{L}_2$, так и для семантики языка $\mathcal{L}_1$.

Предложение 2.1. Пусть:

1) $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{I} \rangle$ – произвольная модель, $\Gamma \in \mathcal{G}$, и v_1 и v_2 – означивания в $\mathcal{M}$;
2) переменная y свободна для x в формуле Φ;
3) v_1 и v_2 согласны относительно всех свободных переменных в Φ кроме, возможно, x и $v_1(x) = v_2(y)$.

Тогда

$$\mathcal{M},\Gamma \vDash_{v_1}^1 \Phi \Leftrightarrow \mathcal{M},\Gamma \vDash_{v_2}^1 \Phi_x^y.$$

Доказательство аналогичного факта для языка без λ-оператора и поссибилистских кванторов, данное у М. Фиттинга и Р. Л. Мендельсона (Fitting M., 1998, C.98-99), можно адаптировать для языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

3. Сравнение выразительных возможностей языков $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$

В этом разделе дано определение перевода с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$, сохраняющего истинностное значение формул, и доказано, что обратного перевода не существует.

3.1 Перевод с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$

Определение 3.1.1 [Перевод формулы с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$] Пусть $\mathbb{T}$ – функция от $\mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ к $\mathbb{F}(\mathcal{L}_2)$, такая что для любых $\Phi, \Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$:

1) если P – n-местный предикатный символ и $x_1, \dots, x_n$ – переменные, то

$$\mathbb{T}(P(x_1, \dots, x_n)) = P(x_1, \dots, x_n);$$

2) $\mathbb{T}(\neg \Phi) = \neg \mathbb{T}(\Phi)$;
3) $\mathbb{T}(\Phi \to \Psi) = \mathbb{T}(\Phi) \to \mathbb{T}(\Psi)$;
4) $\mathbb{T}(\Box \Phi) = \Box \mathbb{T}(\Phi)$;
5) $\mathbb{T}(\forall x \Phi) = \forall x \mathbb{T}(\Phi)$;
6) $\mathbb{T}(\langle \lambda x.\Phi \rangle(t)) = \Sigma y(y = t \,\&\, \mathbb{T}(\Phi^y_x))$, где y не имеет вхождений в $\langle \lambda x.\Phi \rangle(t)$.

Для любой $\Omega \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$, перевод Ω с языка $\mathcal{L}_1$ на язык $\mathcal{L}_2$ – это $\mathbb{T}(\Omega)$.

Пример. На языке $\mathcal{L}_1$ прочтение *de re* предложения «Число планет необходимо больше семи» формализуется следующим образом:

$$\langle \lambda x.\Box x > 7 \rangle(n),$$

где n – число планет. С помощью определения перевода с языка $\mathcal{L}_1$ получим формализацию прочтения *de re* того же предложения на языке $\mathcal{L}_2$:

$$\Sigma y(y = n \,\&\, \Box y > 7),$$

где n – число планет.

Теперь докажем, что перевод сохраняет истинностное значение формул.

Теорема 3.1. *Для любой формулы $\Phi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$, для любой модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, любого $\Gamma \in \mathcal{G}$, любого означивания переменных v в модели $\mathcal{M}$,*

$$\mathcal{M}, \Gamma \vDash^1_v \Phi \iff \mathcal{M}, \Gamma \vDash^2_v \mathbb{T}(\Phi).$$

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по структуре формулы. Ограничимся демонстрацией базового случая и пункта для формул с λ-оператором.

Пусть Φ – атомарная формула $P(x_1, \dots, x_n)$, где n-местный предикат, $x_1, \dots, x_n$ – переменные. Поскольку по определению перевода, $\mathbb{T}(P(x_1, \dots, x_n)) = P(x_1, \dots, x_n)$ и определение истинности-1 согласно с определением истинности-2 относительно формулы $P(x_1, \ldots, x_n)$,

$$\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^1_v P(x_1, \ldots, x_n) \iff \mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^2_v \mathbb{T}(P(x_1, \ldots, x_n)).$$

Отсюда:

$$\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^1_v \mathit{\Phi} \iff \mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^2_v \mathbb{T}(\mathit{\Phi}).$$

Пусть $\mathit{\Phi} = \langle \lambda x.\mathit{\Psi} \rangle(t)$, где $\mathit{\Psi} \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$, t – терм. По определению перевода,

$$\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^2_v \mathbb{T}(\langle \lambda x.\mathit{\Psi} \rangle(t)) \iff \mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^2_v \Sigma y(y = t \,\&\, \mathbb{T}(\mathit{\Psi}^y_x)), \tag{1}$$

где y не имеет вхождений в $\langle \lambda x.\mathit{\Psi} \rangle(t)$.

По определению истинности-2, $\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^2_v \Sigma y(y = t \,\&\, \mathbb{T}(\mathit{\Psi}^y_x))$ тогда и только тогда, когда существует $e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, такой что $\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^2_{v^e_y} y = t$ и $\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^2_{v^e_y} \mathbb{T}(\mathit{\Psi}^y_x)$, т. е., когда $e = v^e_y \mathcal{I}(t, \mathit{\Gamma})$ и $\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^1_{v^e_y} \mathit{\Psi}^y_x$ (с учетом индуктивной гипотезы). Поскольку $(v^e_y \mathcal{I})(t, \mathit{\Gamma}) = (v\mathcal{I})(t, \mathit{\Gamma})$ (этот факт легко доказать), $e = v^e_y \mathcal{I}(t, \mathit{\Gamma})$ и $\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^1_{v^e_y} \mathit{\Psi}^y_x$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^1_{v_y^{v\mathcal{I}(t,\mathit{\Gamma})}} \mathit{\Psi}^y_x$, что, с учетом предложения 2.1. и определения истинности-1, эквивалентно $\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^1_v \langle \lambda x.\mathit{\Psi} \rangle(t)$. Таким образом,

$$\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^1_v \langle \lambda x.\mathit{\Psi} \rangle(t) \iff \mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^2_v \mathbb{T}(\langle \lambda x.\mathit{\Psi} \rangle(t)).$$

Отсюда:

$$\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^1_v \mathit{\Phi} \iff \mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^2_v \mathbb{T}(\mathit{\Phi}).$$

Таким образом, обобщив по $\mathcal{M}$, $\mathit{\Gamma}$, v получим, что для любой формулы $\mathit{\Phi}$ языка $\mathcal{L}_1$, для любой модели $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, любого $\mathit{\Gamma} \in \mathcal{G}$, любого означивания переменных v в $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^1_v \mathit{\Phi} \iff \mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \vDash^2_v \mathbb{T}(\mathit{\Phi}). \blacksquare$$

3.2 Доказательство отсутствия перевода с языка $\mathcal{L}_2$ на язык $\mathcal{L}_1$

Теперь покажем, что не существует перевода с языка $\mathcal{L}_2$ на язык $\mathcal{L}_1$. Чтобы доказать теорему об отсутствии обратного перевода потребуется следующее определение и две леммы.

Определение 3.2.1 (Модель $\mathcal{M}'$) Пусть $\mathit{\Psi} \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ и $\mathit{\Psi}$ не общезначима. Поскольку $\mathit{\Psi}$ необщезначима, существуют модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{R}, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, мир $\mathit{\Gamma}$ и означивание переменных v в $\mathcal{M}$, такие что $\mathcal{M}, \mathit{\Gamma} \nvDash^1_v \mathit{\Psi}$. Возьмем такие $\mathcal{M}$ и $\mathit{\Gamma}$ и построим модель $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{G}', \mathcal{R}, \mathcal{D}', \mathcal{I}' \rangle$ так что:

- $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cup \{E\}$, причем $E \notin \mathcal{G}$;
- $\mathcal{D}'$ определена следующим образом:
  - $\mathcal{D}'(E) = \{p\}$, причем $p \notin \mathcal{D}(\mathcal{M})$,
  - для любого $\Delta \in \mathcal{G}$, $\mathcal{D}'(\Delta) = \mathcal{D}(\Delta)$;
- $\mathcal{I}'$ определена следующим образом:
  - $\mathcal{I}'(P,\Gamma) = \mathcal{I}(P,\Gamma) \cup \{p\}$,
  - для любого $\Delta \in \mathcal{G}$, для любого предикатного символа Q, если $\Delta \neq \Gamma$ или $Q \neq P$, то $\mathcal{I}'(Q,\Delta) = \mathcal{I}(Q,\Delta)$,
  - для любого предикатного символа Q, $\mathcal{I}'(Q,E) = \emptyset$,
  - для любого константного символа c, для любого $\Delta \in \mathcal{G}$, $\mathcal{I}'(c,\Delta) = \mathcal{I}(c,\Delta)$,
  - для любого константного символа c, $\mathcal{I}'(c,E) = p$,
  - для любого $n \geq 1$, любого n-местного функционального символа f и любого $\Delta \in \mathcal{G}$,

$$\mathcal{I}'(f, \Delta) \mid \mathcal{D}(\mathcal{M})^n = \mathcal{I}(f, \Delta),$$

Означивание переменных v в $\mathcal{M}$ является также означиванием переменных в $\mathcal{M}'$.

Лемма 3.2.1. *Для любой модели $\mathcal{M}$, любого означивания v в $\mathcal{M}$, любого $\Delta \in \mathcal{G}$, любого терма t,*

$$(v\mathcal{I})(t,\Delta) = (v\mathcal{I}')(t,\Delta).$$

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по структуре терма. Доказательство для случаев, когда t переменная или константа очевидно.

Пусть t – функциональный терм $g(s_1, \ldots, s_k)$, где $k \geq 1$, g – k-местный функциональный терм. С помощью определений денотации и $\mathcal{I}'$ можем построить цепочку равенств

$$(v\mathcal{I})(g(s_1, \ldots, s_k),\Delta) = \mathcal{I}'(g,\Delta) \mid \mathcal{D}(\mathcal{M})^n((v\mathcal{I})(s_1,\Delta), \ldots, (v\mathcal{I})(s_k,\Delta)) =$$
$$= \mathcal{I}'(g,\Delta)((v\mathcal{I})(s_1,\Delta), \ldots, (v\mathcal{I})(s_k,\Delta)) = (v\mathcal{I}')(g(s_1, \ldots, s_k),\Delta),$$

в которой второе равенство обосновывается так: т. к. $(v\mathcal{I})(s_1,\Delta), \ldots, (v\mathcal{I})(s_n,\Delta) \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, к $(v\mathcal{I})(s_1,\Delta), \ldots, (v\mathcal{I})(s_k,\Delta)$ можно применить индуктивную гипотезу.

Таким образом, для любой модели $\mathcal{M}$, любого означивания v в $\mathcal{M}$, любого $\Delta \in \mathcal{G}$, любого терма t,

$$(v\mathcal{I})(t,\Delta) = (v\mathcal{I}')(t,\Delta). \blacksquare$$

Лемма 3.2.2. *Для любой модели $\mathcal{M}$, любого $\Delta \in \mathcal{G}$, любого означивания переменных v в $\mathcal{M}$ и любой формулы $X \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$,*

$$\mathcal{M},\Delta \vDash^1_v X \iff \mathcal{M}',\Delta \vDash^1_v X.$$

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по структуре формулы. Продемонстрируем доказательство для базового случая и пункта для формул с λ-оператором.

Пусть X – атомарная формула $Q(x_1,\ldots,x_n)$, где n-местный предикат, $x_1,\ldots,x_n$ – переменные. Рассмотрим два случая:

1) $\Delta = \Gamma$ и $Q = P$;
2) $\Delta \neq \Gamma$ или $Q \neq P$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $\mathcal{M}',\Gamma \vDash^1_v P(x)$, где x – переменная. Тогда, по определению истинности-1 и определению денотации, имеем: $v(x) \in \mathcal{I}'(P,\Gamma)$. Поскольку $v(x) \neq p$ и $\mathcal{I}'(P,\Gamma) = \mathcal{I}(P,\Gamma) \cup \{p\}$, $v(x) \in \mathcal{I}'(P,\Gamma)$ тогда и только тогда, когда $v(x) \in \mathcal{I}(P,\Gamma)$, а значит,

$$\mathcal{M}',\Gamma \vDash^1_v P(x) \iff \mathcal{M},\Gamma \vDash^1_v P(x). \tag{2}$$

Рассмотрим второй случай. Согласно определению истинности-1 и определению денотации, $\mathcal{M},\Delta \vDash^1_v Q(x_1,\ldots,x_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда $(v(x_1),\ldots,v(x_n)) \in \mathcal{I}(Q,\Delta)$, т. е., поскольку $\mathcal{I}(Q,\Delta) = \mathcal{I}'(Q,\Delta)$, когда $\mathcal{M}',\Delta \vDash^1_v Q(x_1,\ldots,x_n)$. Значит,

$$\mathcal{M},\Delta \vDash^1_v Q(x_1,\ldots,x_n) \iff \mathcal{M}',\Delta \vDash^1_v Q(x_1,\ldots,x_n). \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\mathcal{M},\Delta \vDash^1_v X \iff \mathcal{M}',\Delta \vDash^1_v X.$$

Пусть $X = \langle \lambda x.\Omega \rangle(t)$, где Ω – формула, t – терм. Предварительно докажем лемму.

С учетом определения истинности-1 и леммы 3.2.1 построим цепочку эквивалентностей

$$\begin{aligned}\mathcal{M},\Delta \vDash^1_v \langle \lambda x.\Omega \rangle(t) \iff \mathcal{M},\Delta \vDash^1_{v_x^{(v\mathcal{I})(t,\Delta)}} \Omega \iff \\ \iff \mathcal{M},\Delta \vDash^1_{v_x^{(v\mathcal{I}')(t,\Delta)}} \Omega \iff \mathcal{M}',\Delta \vDash^1_v \langle \lambda x.\Omega \rangle(t),\end{aligned} \tag{4}$$

в которой переход от третьего к четвертому звену мотивирован применением индуктивной гипотезы к $\mathcal{M},\Delta \vDash^1_{v_x^{(v\mathcal{I}')(t,\Delta)}} \Omega$. Из (4) следует:

$$\mathcal{M},\Delta \vDash^1_v X \iff \mathcal{M}',\Delta \vDash^1_v X.$$

Таким образом, для любой модели $\mathcal{M}$, любого $\Delta \in \mathcal{G}$, любого означивания переменных v в $\mathcal{M}$ и любой формулы $X \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$,

$$\mathcal{M},\Delta \vDash^1_v X \iff \mathcal{M}',\Delta \vDash^1_v X. \blacksquare$$

Теорема 3.2. *Существует формула $\Phi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_2)$, которой не эквивалентна ни одна из формул языка $\mathcal{L}_1$, т. е. для любой формулы $\Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ существуют модель $\mathcal{M}$, мир Γ и означивание v, такие что*

$$(\mathcal{M},\Gamma \vDash^2_v \Phi \,\&\, \mathcal{M},\Gamma \nvDash^1_v \Psi) \vee (\mathcal{M},\Gamma \nvDash^2_v \Phi \,\&\, \mathcal{M},\Gamma \vDash^1_v \Psi).$$

Доказательство. Определим Φ как $\Sigma x P(x)$. Возьмем $\Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$. Рассмотрим два случая: Ψ общезначима и Ψ не общезначима.

Пусть Ψ общезначима. Тогда для любых модели $\mathcal{M}$, мира Γ и означивания v, $M,\Gamma \vDash^1_v \Psi$. Построим модель $M = \langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{I}\rangle$ так что: $\mathcal{G} = \{\Gamma\}, \mathcal{R} = \emptyset, \mathcal{D}(\Gamma) = \{p\}$ и $\mathcal{I}(P,\Gamma) = \emptyset$. Поскольку $\mathcal{I}(P,\Gamma) = \emptyset$ для любого $e \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$, $e \notin \mathcal{I}(P,\Gamma)$, следовательно, $M,\Gamma \nvDash^2_v \Sigma x P(x)$. Значит,

$$\mathcal{M},\Gamma \nvDash^2_v \Phi \,\&\, \mathcal{M},\Gamma \vDash^1_v \Psi$$

и, следовательно, существуют модель $\mathcal{M}$, мир Γ и означивание v, такие что:

$$(\mathcal{M},\Gamma \vDash^2_v \Phi \,\&\, \mathcal{M},\Gamma \nvDash^1_v \Psi) \vee (\mathcal{M},\Gamma \nvDash^2_v \Phi \,\&\, \mathcal{M},\Gamma \vDash^1_v \Psi).$$

Пусть Ψ не общезначима. Тогда существуют модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{G},\mathcal{R},\mathcal{D},\mathcal{I}\rangle$, мир Γ и означивание переменных v в $\mathcal{M}$, такие что $\mathcal{M},\Gamma \nvDash^1_v \Psi$. С учетом леммы 3.2.2 из того, что $\mathcal{M},\Gamma \nvDash^1_v \Psi$, следует, что $\mathcal{M}',\Gamma \nvDash^1_v \Psi$. Покажем, что $\mathcal{M}',\Gamma \vDash^2_v \Sigma x P(x)$. Поскольку $p \in \mathcal{I}'(P,\Gamma)$, существует $e \in \mathcal{D}'(\mathcal{M}')$, такое что $e \in \mathcal{I}'(P,\Gamma)$. Значит, по определению истинности-2, $\mathcal{M}',\Gamma \vDash^2_v \Sigma x P(x)$. Таким образом, имеем:

$$\mathcal{M}',\Gamma \vDash^2_v \Phi \,\&\, \mathcal{M}',\Gamma \nvDash^1_v \Psi$$

и, следовательно, существуют модель $\mathcal{M}$, мир Γ и означивание v, такие что:

$$(\mathcal{M},\Gamma \vDash^2_v \Phi \,\&\, \mathcal{M},\Gamma \nvDash^1_v \Psi) \vee (\mathcal{M},\Gamma \nvDash^2_v \Phi \,\&\, \mathcal{M},\Gamma \vDash^1_v \Psi).$$

Таким образом, существует формула $\Phi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_2)$, такая что для любой формулы $\Psi \in \mathbb{F}(\mathcal{L}_1)$ существуют модель $\mathcal{M}$, мир Γ и означивание v, такие что

$$(\mathcal{M},\Gamma \vDash^2_v \Phi \,\&\, \mathcal{M},\Gamma \nvDash^1_v \Psi) \vee (\mathcal{M},\Gamma \nvDash^2_v \Phi \,\&\, \mathcal{M},\Gamma \vDash^1_v \Psi). \blacksquare$$

4. Заключение

Итак, было показано, что язык первопорядковой модальной логики с двумя видами кванторов и предикатом равенства превосходит по выразительной силе язык первопорядковой модальной логики с λ-оператором[4].

Список литературы:

Fitting, M. & Mendelson, R. L. *First-Order Modal Logic.* New York : Springer Dordrecht.

Информация об авторе: Мухаметшина Индира Искандаровна, студент философского факультета Томского государственного университета, г. Томск, mukhametshina.indira@gmail.com.

Поступила в редакцию: 27 мая 2023 г.
Получена после рецензирования: 23 июля 2023 г.
Принята к публикации: 17 августа 2023 г.
Опубликована: 11 сентября 2023 г.

Mukhametshina Indira Iskandarovna

The expressive power of the λ-operator and possibilist quantifiers in first-order modal logics

Abstract: The article presents a comparison of the expressive power of two languages of first-order modal logic: one of them contains the λ-operator and actualist quantifiers, and the other does not contain the λ-operator, but contains actualist quantifiers, possibilist quantifiers and equality. It is shown

[4] За ряд идей, использованных в статье, и ценные замечания по первой версии текста выражаю признательность Е. В. Борисову.

that there is a truth-preserving translation from the first language to the second one, and that there is no reverse translation. The results show that the second language surpasses the first language in expressive power.

Keywords: first-order modal logic, *de re*, λ-operator, possibilist quantifiers.

Citation: Mukhametshina, I. I. (2023). The expressive power of the λ-operator and possibilist quantifiers in first-order modal logics. *Analytica*, *8*, 90–103.

References:

Fitting, M. & Mendelson, R. L. *First-Order Modal Logic.* New York: Springer Dordrecht.

Authors Information: Mukhametshina Indira Iskandarovna, Student of the Faculty of Philosophy of Tomsk State University, Tomsk, mukhametshina.indira@gmail.com.

Received: 27 May 2023
Revised: 23 July 2023
Accepted: 17 August 2023
Published: 11 September 2023