Analytica, №3, 2009

Виталий Филипповский

Реконструкция доказательства Первой теоремы К. Гёделя о неполноте

Реконструкция доказательства[1] Первой теоремы К. Гёделя о неполноте будет строиться, следуя следующим принципам:

1) Все формулы, которые содержатся в явном виде в интуитивном доказательстве теоремы, будут содержаться также и в реконструированном доказательстве[2].

2) Неформальные выражения, содержащиеся в интуитивном доказательстве и являющиеся существенными для хода доказательства, будут символизированы и включены в реконструированное доказательство теоремы.

3) В интуитивном доказательстве некоторые необходимые шаги пропущены или оговорены в недостаточно точной форме. Мы стремимся воспроизвести реконструированное доказательство так, чтобы все переходы от одной строки доказательства к другой были непосредственными, т. е. для любой данной формулы, стоящей на данной строке доказательства должны найтись такое правило вывода из

[1] Начиная с этой части мы будем говорить о доказательстве теоремы в двояком смысле, а именно: во-первых, о доказательстве, которое содержится в статье «О формально неразрешимых предложениях *Principia Mathematica* и родственных систем I»; во вторых, о доказательстве, которое мы будем строить в этом пункте, притендуя на самую большую точность и свободу от интуитивности. Для целей различения двух этих смыслов, введём следующее словоупотребление. Для выражения первого понимания мы будем далее говорить «интуитивное доказательство Первой теоремы К. Гёделя о неполноте» (кратко для этой части: «интуитивное доказательство»); для второго – «реконструированное формальное доказательство Первой теоремы К. Гёделя о неполноте» (кратко: «реконструированное доказательство»).

[2] В единственном случае такие формулы будут подвергаться корректуре: если в формулу входят операторы квантификации в виде двух скобок, в которые взят(ы) параметр(ы) (для экзистенциальной квантификации ещё также знак 'E'), по которому(ым) происходит квантификация. В этом случае в реконструированном доказательстве будут содержаться те же формулы, но переписанные с участием кванторов всеобщности $\forall$ и существования $\exists$.

допущенных Гёделем и такие предшествующие формулы вывода, применение к которым указанного правила вывода даёт в результате формулу, стоящую на данной строке. Таким образом, для того, чтобы сделать переход от интутивного доказательства к реконструированному, необходимо заполнить все необходимые пробелы в интуитивном доказательстве. Любое такое заполнение пробелов суть исследовательская задача построения дополнительного вывода из имеющихся формул готовой последовательности доказательства данной формулы, которая утверждается на данном шаге и которая не является непосредственно выводимой из предшествующих ей.

4) Доказательство (точнее вывод) теоремы будет проведено с анализом. Строки доказательства, на которых стоят формулы, предполагающиеся Гёделем в качестве допущений или вводимые на основании определений, имеют в качестве анализа статусы этих утверждений, например: «допущение», «определение». Строки, на которых стоят выводные формулы, т. е. формулы, которые получены в результате одной или нескольких трансформаций одной или нескольких предшествующих формул, имеют в качестве анализа указание определённых правил вывода и тех формул, к которым эти правила вывода были применены.

5) Мы применяем также метод обозначения области действия вводимых допущений с помощью сплошных линий, которые идут вдоль нумерации шагов вывода.

6) Для лучшей обозримости доказательства рамкой обозначим ядро доказательства, которое воспроизводит структуру рассуждений типа «парадокс Лжеца».

Реконструкция будет произведена в три этапа:

I. Сначала мы дадим обширную выдержку из источника «О формально неразрешимых предложениях *Principia Mathematica* и родственных систем I», которая является подлинным[3] (интуитивным)

[3] Подлинность этого доказательства зависит от двух переводов статьи Гёделя: с немецкого на английский язык, а затем автором настоящей работы – с английского на русский. Заметим, что проблема переводимости в научной работе не должна возникать. Для того, чтобы отвести все подозрения в том, что автор исказил суть излагаемого, предлагаем читателю обратиться к работе Гёделя в подлиннике: Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der *Principipa Mathematica* und verwandter System I. In: Monatshefte für Mathematik und Physik, 38. 1931, pp. 173–198, или к одному из существующих переводов этой работы на английский язык,

доказательством Первой теоремы К. Гёделя о неполноте.

II. Затем будет дана собственно процедура реконструкции, отражением которой будет являться та же самая выдержка с её дополнительной обработкой, которая будет осуществляться в соответствии с теми принципами, которые были только что указаны. Это значит, что мы будем

1) включать в вывод явные формулы;

2) символизировать неявные формулы и включать эти формулы в вывод;

3) заполнять пробелы интуитивного доказательства;

4) проводить анализ доказательства;

5) фиксировать границы действия вводимых допущений доказательства;

6) применять дополнительные способы выделения отдельных частей доказательства.

III. Наконец, полное реконструированное формальное доказательство будет представлено в той форме, которая является признанной в логической практике.

I

В работе «О формально неразрешимых предложениях *Principia Mathematica* и родственных систем I» К. Гёдель пишет[4]:

> Главный результат о существовании неразрешимых высказываний состоит в следующем:
>
> **Теорема VI**. *Для каждого ω–непротиворечивого рекурсивного класса формул $\varkappa$ существуют рекурсивные знаки классов r, такие, что ни $v\ Gen\ r$, ни $Neg(v\ Gen\ r)$ не принадлежат $Flg(\varkappa)$ (где v суть свободная переменная знака класса r).*

например, тому, к которому обращался автор: Gödel K. On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I. In: Frege and Gödel: Two Fundamental Texts in Mathematical Logic. Cambridge, Massachusetts, 1970, pp. 87–107.

[4]Gödel K. On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and related systems I. In: Frege and Gödel: Two Fundamental Texts in Mathematical Logic. Cambridge, Massachusetts, 1970, pp. 98–100.

Доказательство. Пусть $\varkappa$ – любой рекурсивный ω–непротиворечивый класс формул. Мы определяем

$$Bw_{\varkappa}(x) \equiv (n)\ [n \leqq l(x) \rightarrow Ax(n\ Gl\ x) \vee (n\ Gl\ x)\ \varepsilon\ \varkappa \vee$$
$$\vee\ (Ep,\ q)\{0 < p,\ q < n\ \&\ Fl(n\ Gl\ x,\ p\ Gl\ x,\ q\ Gl\ x)\}]\ \&$$
$$\&\ l(x) > 0 \tag{5}$$

(см. аналогичное понятие 44),

$$x\ B_{\varkappa}\ y \equiv Bw_{\varkappa}(x)\ \&\ [l(x)]\ Gl\ x = y \tag{6}$$

$$Bew_{\varkappa}(x) \equiv (Ey)y\ B_{\varkappa}\ x \tag{6.1}$$

(см. аналогичные понятия 45 и 46).

Мы, очевидно, имеем

$$(x)[Bew_{\varkappa}(x) \equiv x\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)] \tag{7}$$

и

$$(x)[Bew(x) \rightarrow Bew_{\varkappa}(x)]. \tag{8}$$

Теперь определим отношение

$$Q(x,y) \equiv \overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}. \tag{8.1}$$

Поскольку $x\ B_{\varkappa}\ y$ (в силу (6) и (5)) и $Sb(y^{19}_{Z(y)})$ (в силу Определений 17 и 31) являются рекурсивными, таким же является и $Q(x,y)$. Следовательно, в силу Теоремы V и (8), существует знак отношения q (со свободными переменными 17 и 19), такой, что

$$\overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]} \rightarrow Bew_{\varkappa}[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(y)})] \tag{9}$$

и

$$x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})] \rightarrow Bew_{\varkappa}[Neg\ (Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(y)}))]. \tag{10}$$

Положим

$$p = 17\ Gen\ q \tag{11}$$

(p есть знак класса со свободной переменной 19) и

$$r = Sb(q^{19}_{Z(p)}) \tag{12}$$

(r есть рекурсивный знак класса[5] со свободной переменной 17).

Тогда мы имеем

$$Sb(p^{19}_{Z(p)}) = Sb([17\ Gen\ q]^{19}_{Z(p)}) =$$

$$= 17\ Gen\ Sb(q^{19}_{Z(p)}) = 17\ Gen\ r \tag{13}$$

(в силу (11) и (12));[6] более того

$$Sb(q^{17}_{Z(x)}\,{}^{19}_{Z(p)}) = Sb(r^{17}_{Z(x)}) \tag{14}$$

(в силу (12)). Если мы теперь подставим p вместо y в (9) и (10) и примем во внимание (13) и (14), мы получим

$$\overline{x\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r)} \rightarrow Bew_\varkappa[Sb(r^{17}_{Z(x)})], \tag{15}$$

$$x\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r) \rightarrow Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(x)}))]. \tag{16}$$

Это даёт:

1. 17 $Gen\ r$ не является $\varkappa$–доказуемой.[7] Если бы это было не так, то нашёлся бы такой n, что имела бы место $n\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r)$. Следовательно, в силу (16) мы бы имели $Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(n)}))]$, в то время как, с другой стороны, из $\varkappa$–доказуемости 17 $Gen\ r$ следует $Sb(r^{17}_{Z(n)})$. Следовательно, $\varkappa$ является противоречивым (и, тем более, ω–противоречивым).

2. Neg(17 $Gen\ r$) не является $\varkappa$–доказуемой. Доказательство: Как только что было доказано, 17 $Gen\ r$

[5][Сноска 43 из Ibid., p. 99. – *В. Ф.*] Поскольку r получен из рекурсивного знака отношения q замещением переменной определённым числом p. [Конечная часть этой сноски (которая касается того, что не является необходимым в доказательстве), будучи установленной точно, выглядела бы следующим образом: "замещением переменной нумералом для p".]

[6][Сноска 44 из Ibid. – *В. Ф.*] Операции Gen и Sb всегда могут заменяться друг другом в случае, если они относятся к разным переменным.

[7][Сноска 45 из Ibid. – *В. Ф.*] Под "x является $\varkappa$–доказуемым" мы понимаем $x\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)$, что, в силу (7), означает то же самое, что и $Bew_\varkappa(x)$.

> не является $\varkappa$–доказуемой; т. е. (в силу (6.1)), имеет место $(n)\overline{(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))}$. Из этого следует, в силу (15), $(n)Bew_{\varkappa}[Sb(r^{17}_{Z(n)})]$, и которая вместе с $Bew_{\varkappa}[Neg\ (17\ Gen\ r)]$ является несовместимым с ω–непротиворечивостью $\varkappa$.
>
> 17 $Gen\ r$ является, таким образом, неразрешимой на основании $\varkappa$ и обосновывает Теорему VI.

Здесь интуитивное доказательство теоремы заканчивается. Однако, некоторые дальнейшие пояснения этого доказательства являются не менее интересными, поскольку позволяют формально выразить факт появления неразрешимых высказываний. Эти пояснения являются необходимыми для дальнейшей реконструкции, поэтому мы приведём необходимый участок пояснений. Гёдель пишет[8]:

> Нетрудно видеть, что только что приведённое доказательство является конструктивным[9]; т. е. в интуиционистски приемлемой форме было доказано следующее: Пусть дан произвольный рекурсивно определённый класс формул $\varkappa$. Тогда, если нам будет представлено формальное разрешение (на основании $\varkappa$) высказывательной формулы 17 $Gen\ r$ (которая [для каждого $\varkappa$] может быть действительно представлена), мы фактически можем дать
>
> 1. Доказательство $Neg\ (17\ Gen\ r)$;
>
> 2. Для всякого данного n доказательство $Sb(r^{17}_{Z(n)})$. Т. е. формальная разрешимость 17 $Gen\ r$ имела бы следствие, что мы могли бы фактически показать ω–противоречивость.
>
> Мы будем говорить, что отношение между (или класс) натуральными(ых) числами(ел) $R(x_1, \ldots, x_n)$ является *разрешимым* [*entscheidungsdefinit*], если существует n–местный знак отношения r, такой, что имеют

[8]Ibid., p. 100.

[9][Сноска 45a из Ibid. – *В. Ф.*] Так как все экзистенциальные утверждения, входящие в доказательство, основаны на Теореме V, которая, как мы легко видели, не является противной интуиционистской точке зрения.

> место (3) и (4) (см. Теорему V). В частности, следовательно, в силу Теоремы V, каждое рекурсивное отношение является разрешимым. Похожим образом знак отношения будет называться *разрешимым*, если он поставлен в соответствие разрешимому отношению. Для существования неразрешимых высказываний достаточно, чтобы класс $\varkappa$ был ω–непротиворечивым и разрешимым. Поскольку разрешимость переносится от $\varkappa$ к $x\ B_{\varkappa}\ y$ (см. (5) и (6)) и к $Q(x, y)$ (см. (8.1)), и только это использовалось в доказательстве, данном выше. В данном случае неразрешимое высказывание имеет форму $v\ Gen\ r$, где r является разрешимым знаком класса. (Заметим, что достаточно даже того, чтобы $\varkappa$ был разрешимым в системе, расширенной при помощи $\varkappa$.)

II

Будем продвигаться по тексту интуитивного доказательства, останавливаясь и фиксируя каждый новый шаг в последовательности реконструируемого доказательства теоремы.

1. Начать следует с самого начала:

> Главный результат о существовании неразрешимых высказываний состоит в следующем:
>
> **Теорема VI**. *Для каждого ω–непротиворечивого рекурсивного класса формул $\varkappa$ существуют рекурсивные знаки классов r, такие, что ни $v\ Gen\ r$, ни $Neg(v\ Gen\ r)$ не принадлежат $Flg(\varkappa)$ (где v суть свободная переменная знака класса r).*

Используя методы символизации, запишем выражение теоремы формально:

$$\forall\varkappa\Big[(recursive(\varkappa)\ \ \&\ \ {}_{\omega}consist(\varkappa))\ \ \supset\ \ \exists r\Big(recursive(r)\supset \overline{(v\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\ \ \&\ \ \overline{(Neg(v\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\Big)\Big].$$

Поскольку r не входит свободно в $recursive(\varkappa)$ и ${}_{\omega}consist(\varkappa)$, формальное выражение теоремы может быть переписано следующим образом (используя экспортацию):

$$\forall\varkappa,\ \exists r\Big[\big(recursive(\varkappa)\quad\&\quad {}_{\omega}consist(\varkappa)\quad\&\quad recursive(r)\big)\supset \overline{(v\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\quad\&\quad \overline{(Neg(v\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\Big].$$

Это суть та формула, которую следует доказать, а следовательно, её место – в конце последовательности доказательства. К результирующей формуле мы ещё вернёмся.

2. Следуем далее:

> *Доказательство.* Пусть $\varkappa$ – любой рекурсивный ω–непротиворечивый класс формул.

Здесь мы имеем три немаловажных момента:

1) класс формул $\varkappa$ изначально рассматривается как *любой* класс формул. Это означает, что всякое дальнейшее вхождение знака $\varkappa$ в любую из ниже следующих формул в последовательности доказательства является связанным универсальным квантором. Поскольку Гёдель везде в дальнейшем пренебрегает постановкой этой квантификации, мы также минуем этот существенный момент, но лишь до того момента, когда нам нужно будет явным образом выписать доказанную формулу;

2) класс формул $\varkappa$ является рекурсивным. Это суть первое допущение в доказательстве. Поскольку у Гёделя мы не находим для него формального выражения, символизируем его самостоятельно: $recursive\{\varkappa\}$. Это допущение будет занимать первую строку реконструированного доказательства. А поскольку это допущение, то анализом этой формулы будет «допущение».

3) класс формул $\varkappa$ является ω–непротиворечивым. Это суть второе допущение в доказательстве. В силу той же самой причины вновь символизируем его самостоятельно: ${}_{\omega}consist\{\varkappa\}$. Это понятие непосредственно участвует в доказательстве основного тезиса теоремы, поэтому для него нам требуется определение. В интуитивном доказательстве нет такого определения. Зато определение этого понятия содержится чуть ранее в работе[10]:

> $\varkappa$ называется ω–непротиворечивым, если не существует знака класса a, такого, что
>
> $$(n)[Sb(a^{v}_{Z(n)})\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)]\ \&\ [Neg(v\ Gen\ a)]\ \varepsilon\ Flg(\varkappa),$$

[10]Ibid., p. 98.

где v суть свободная переменная знака класса a.

Для того, чтобы определение было символизировано полностью, символизируем первую словесную часть приведённого определения и дополним этим данную в определении формулу. В результате у нас вышло следующее определение:

$$_{\omega}consist\{\varkappa\} \equiv \overline{\exists a \left(\forall n[Sb(a^{v}_{Z(n)})\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)]\ \&\ [Neg(v\ Gen\ a)]\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)\right)}.$$

Определения понятий должны предшествовать их допущениям, поэтому выше построенное определение будет занимать вторую строку реконструированного доказательства с анализом «определение», а само допущение $_{\omega}consist\{\varkappa\}$ – третью с анализом «допущение».

3. Пойдём далее:

Мы определяем

$$Bw_{\varkappa}(x) \equiv\ (n)\ [n\ \leqq\ l(x) \rightarrow\ Ax(n\ Gl\ x)\ \vee\ (n\ Gl\ x)\ \varepsilon\ \varkappa \vee$$
$$\vee\ (Ep,\ q)\{0 < p,\ q < n\ \&\ Fl(n\ Gl\ x,\ p\ Gl\ x,\ q\ Gl\ x)\}]\ \&$$
$$\&\ l(x) > 0 \qquad (5)$$

(см. аналогичное понятие 44),

Формула (5) содержится в интуитивном доказательстве теоремы в явном виде и будет включена в реконструированное доказательство на следующем четвёртом шаге. Эта формула имеет ссылку на введённое ранее Гёделем Определение 44[11]. Анализ этой строки доказательства будет включать указание статуса этой формулы: «определение» и ссылку на Определение 44.

4. Читаем далее:

$$x\ B_{\varkappa}\ y \equiv Bw_{\varkappa}(x)\ \&\ [l(x)]\ Gl\ x = y \qquad (6)$$

$$Bew_{\varkappa}(x) \equiv (Ey)y\ B_{\varkappa}\ x \qquad (6.1)$$

(см. аналогичные понятия 45 и 46).

[11]Имеется в виду одно из 45 рекурсивных Определений, которые Гёдель ввёл в Секции 2 своей работы.

Формулы (6) и (6.1) будут включены в реконструированное доказательство на пятом и шестом шагах поскольку содержатся в интуитивном доказательстве теоремы в явном виде. Анализы этих строк доказательств будут включать указание статусов этих формул: для обеих – «определение» и ссылки на Определения 45 и 46 соответственно для (6) и (6.1).

5. Читаем далее:

Мы, очевидно, имеем

$$(x)[Bew_{\varkappa}(x) \equiv x \ \varepsilon \ Flg(\varkappa)] \tag{7}$$

и

$$(x)[Bew(x) \rightarrow Bew_{\varkappa}(x)]. \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) содержатся в интуитивном доказательстве теоремы в явном виде и будут включены в реконструированное доказательство. Формула (7) будет включена на седьмой строке. Прежде, чем включать формулу (8) в доказательство, нужно сделать следующее. Формула (7) утверждает для любого x тождество двух формул: $Bew_{\varkappa}(x)$ и $x \ \varepsilon \ Flg(\varkappa)$, – и позволяет трансформировать определение

$$_{\omega}consist\{\varkappa\} \equiv \overline{\exists a \left(\forall n[Sb(a^{v}_{Z(n)}) \ \varepsilon \ Flg(\varkappa)] \ \& \ [Neg(v \ Gen \ a)] \ \varepsilon \ Flg(\varkappa)\right)},$$

в котором имеются две подформулы: $Sb(a^{v}_{Z(n)}) \ \varepsilon \ Flg(\varkappa)$ и $Neg(v \ Gen \ a) \ \varepsilon \ Flg(\varkappa)$, – которые можно заменить на эквивалентные им. Удаляя универсальный квантор в (7) и по–разному устанавливая конкретизацию переменной x, имеем в отношении первой формулы:

$$Sb(a^{v}_{Z(n)}) \ \varepsilon \ Flg(\varkappa) \equiv Bew_{\varkappa}(Sb(a^{v}_{Z(n)})),$$

и в отношении второй:

$$Neg(v \ Gen \ a) \ \varepsilon \ Flg(\varkappa) \equiv Bew_{\varkappa}(Neg(v \ Gen \ a)).$$

Включим эти две формулы в реконструкцию на строках 8 и 9 соответственно. Анализ этих шагов будет одинаков: ∀–удал., 7 и указание конкретизации переменной x, а именно: $x = Sb(a^{v}_{Z(n)})$ (для первой формулы) и $x = Neg(v \ Gen \ a)$ (для второй формулы).

Если некоторая данная формула содержит некоторую формулу в качестве своей подформулы, и если имеется эквивалентность этой подформулы третьей формуле, то результат замены в данной формуле её подформулы третьей формулой, эквивалентной заменяемой, является эквивалентным первоначально данной формуле[12]. Применим это правило замены к определению ${}_\omega consist$ и к двум эквивалентностям, которые были только что приведены. В результате замены получим:

$$ {}_\omega consist\{\varkappa\} \equiv \overline{\exists a\left(\forall n[Bew_\varkappa(Sb(a^v_{Z(n)}))]\ \&\ Bew_\varkappa(Neg(v\ Gen\ a))\right)}. $$

Только что полученное эквивалентное определение ${}_\omega consist$ будет включено в реконструированное доказательство на десятой строке. Анализ для этого определения был представлен выше, а именно: правилом вывода служит вспомогательное правило вывода – правило замены тождественных подформул друг другом с сохранением значения истинности главной формулы (или просто правило замены), а операндами выступают формула–определение на второй строке и эквивалентности, стоящие на строках 8 и 9.

На одиннадцатой строке в реконструированное доказательство будет включена формула (8).

Анализ для введения формул (7) и (8), стоящих на 7 и 11 строках реконструированного доказательства, у Гёделя отсутствует; он лишь отмечает, что их «мы, очевидно, имеем». В анализе этих строк мы пишем: «без анализа»[13].

[12] См., например, Теорему 5 в издании Клини С. К. Математическая логика. – М., 2005, с. 30.

[13] Можно лишь высказать свои догадки по этому поводу. Что касается формулы (8), то она верна в силу пресуппозиции, что класс формул $\varkappa$ изначально рассматривается как *любой* класс формул. Это означает, что формула $\forall x[Bew(x) \rightarrow Bew_\varkappa(x)]$, которая может быть рассмотрена скорее как $\forall x[Bew(x) \rightarrow Bew(\varkappa, x)]$, должна быть обобщена до $\forall x, \varkappa[Bew(x) \rightarrow Bew(\varkappa, x)]$ или, – что то же, – $\forall x[Bew(x) \rightarrow \forall\varkappa Bew(\varkappa, x)]$, поскольку пресуппозиция диктует связывать универсальным квантором всякое вхождение знака $\varkappa$ в любую из формул в последовательности доказательства. Если рассматривать запись $Bew(x)$ сокращением для $\forall\varkappa Bew(\varkappa, x)$, то последняя формула, очевидно, является выражением тождественной импликации. Что же касается формулы (7), то она верна в силу того, что быть доказуемой в рамках класса $\varkappa$ формулой значит быть либо аксиомой, либо допускаемой формулой (допускаемой в качестве элемента класса $\varkappa$), либо выводимой из других формул по одному из правил вывода. Но именно это фиксирует формула $x\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)$. Средствами дополнительной символизации можно убрать неясность

6. Читаем далее:

Теперь определим отношение

$$Q(x,y) \equiv \overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}. \qquad (8.1)$$

Формула (8.1) должна быть включена в реконструированное доказательство, поскольку содержится в интуитивном доказательстве теоремы в явном виде. Обратим внимание на следующее существенное замечание. Формула (8.1) представляет собой определение, которое в скрытой форме содержит допущение. Дефиниенс этого определения не является ранее включённым в доказательство. На данном шаге Гёдель также не делает никаких пояснений относительно оснований для введения этой формулы (дефиниенса). То же самое касается и дефиниендума этого определения. Получается, что на этом шаге нечто определяется через другое нечто[14] Для того, чтобы видеть ситуацию

анализа оснований для введения в реконструированное доказательство двух формул (7) и (8).

[14]Это определение, с точки зрения автора, является ключевым в доказательстве существования неразрешимых высказываний. Мы видели из интуитивного доказательства, что

> 17 *Gen r* является [...] неразрешимой на основании $\varkappa$ [формулой] и обосновывает Теорему VI.

Как было отмечено Франческой Гвиди в Guidi Fr. La proposizione di Gödel, California, 2007. pp. 76–77, сноска 73, формула 17 *Gen r* получена из формулы (8.1). Далее мы проследим, что это действительно так:

> La formula effettiva, costruita nell' immagine isomorfa di *PM*, sara 17 *Gen r*, ottenuta dalla relazione $Q(x,y) \equiv \overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}$: «$x$ non è il numero di Gödel di una dimostrazione della formula indicata con $[Sb(y^{19}_{Z(y)})]$». Quest' ultima espressione viene a designare, nell' ambito del calcolo aritmetico formalizzato: «il numero di Gödel della formula generata dalla formula che ha numero di Gödel y, sostituendo nella variabile libera con numero 19, il numerale di y».

Или:

> Реальной [неразрешимой] формулой, построенной в изоморфном образе *PM*, будет 17 *Gen r*, полученная из отношения $Q(x,y) \equiv \overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}$: «$x$ не является гёделевым номером доказательства формулы, обозначенной $[Sb(y^{19}_{Z(y)})]$». Это последнее выражение будет обозначать в рамках арифметического формального исчисления:

отчётливее, необходимо разделить две операции, которые производятся одновременно на этом шаге:

1) полагание дефиниенса или дефиниендума в качестве допущения; и

2) собственно введение определения отношения $Q(x, y)$.

Поскольку же определения понятий (отношений) должны предшествовать введению их дефиниендумов в качестве допущений, мы уточним сказанное:

1) введение определения отношения $Q(x, y)$; и

2) полагание его дефиниендума в качестве допущения.

Реализуем обе операции, включив в реконструкцию определение (8.1) на двенадцатом шаге и допущение $Q(x, y)$ – на тринадцатом. Анализом первого будет: «определение», а второго – «допущение».

7. Читаем далее:

> Поскольку $x\ B_\varkappa\ y$ (в силу (6) и (5)) и $Sb(y^{19}_{Z(y)})$ (в силу Определений 17 и 31) являются рекурсивными, таким же является и $Q(x, y)$.

Для того, чтобы $Q(x, y)$ было рекурсивным отношением, таким же должно быть ему тождественное отношение $\overline{x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}$. Последнее является рекурсивным, если соблюдены следующие шесть условий.

1) $x\ B_\varkappa\ y$ является рекурсивным, или: $recursive(x\ B_\varkappa\ y)$.

Это условие соблюдается в силу следующих обстоятельств. Выше рассмотренное утверждение (6) (в реконструкции занимает строку 5) определяет отношение $x\ B_\varkappa\ y$; дефиниендум этого определения представляет собой конъюнкцию двух членов. В силу Теоремы II[15], эта конъюнкция будет рекурсивной, если рекурсивными являются её члены. Первый член конъюнкции – $[l(x)]\ Gl\ x = y$, т. е. отношение равенства. В силу Теоремы III[16] равенство рекурсивно, если оба члена равенства рекурсивны. Первый член равенства, – $[l(x)]\ Gl\ x$, –

«гёделев номер формулы, полученной из формулы, гёделев номер которой есть y, подстановкой вместо свободной переменной с номером 19 нумерала y». – *Перевод автора.*

[15] Gödel K. Op. cit., p. 93.

[16] Ibid.

является рекурсивным в силу Определения 6[17]. Второй член равенства, – переменная y, – является тривиально рекурсивным. Таким образом, равенство $[l(x)]\ Gl\ x = y$, т. е. первый член конъюнкции, является рекурсивным. Второй член конъюнкции – $Bw_{\varkappa}(x)$, определение которого суть утверждение (5), которое было рассмотрено нами выше и включено в реконструкцию на строке 4. Формула $Bw_{\varkappa}(x)$ также является рекурсивной. Поскольку имеем оба рекурсивных члена конъюнкции, – в силу Теоремы II, – отношение $x\ B_{\varkappa}\ y$ является рекурсивным.

2) $Z(y)$ является рекурсивным, или: $recursive(Z(y))$.
Это условие соблюдается, поскольку $Z(y)$ является рекурсивным отношением в силу Определения 17[18].

3) $Sb(y^z_x)$ является рекурсивным, или: $recursive(Sb(y^z_x))$.
$Sb(y^z_x)$ является рекурсивным отношением в силу Определения 31[19].

4) $Sb(y^{19}_{Z(y)})$ является рекурсивным, или: $recursive(Sb(y^{19}_{Z(y)}))$.
$Sb(y^{19}_{Z(y)})$ является рекурсивным отношением в силу Теоремы I[20], поскольку получено из рекурсивного отношения $Sb(y^z_x)$ путём подстановки рекурсивного же $Z(y)$ вместо переменной x, а вместо переменной z – константы 19 (тривиально рекурсивной).

5) $x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]$ является рекурсивным отношением, или: $recursive(x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})])$.
$x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]$ является рекурсивным отношением в силу Теоремы I, поскольку получено из рекурсивного отношения $x\ B_{\varkappa}\ y$ путём подстановки рекурсивного же $Sb(y^{19}_{Z(y)})$ вместо переменной y.

6) $\overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}$ является рекурсивным отношением, или: $recursive(\overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]})$.
$\overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}$ является рекурсивным отношением в силу Теоремы II, поскольку получено из рекурсивного $x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]$ путём операции отрицания.

Поскольку все шесть условий, при которых отношение $\overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}$ является рекурсивным, соблюдены, и это отношение рекурсивно, то, следовательно, ему тождественное отношение, –

[17] Ibid., p. 95.
[18] Ibid.
[19] Ibid., p. 96.
[20] Ibid., p. 93.

$Q(x,y)$, – является также рекурсивным, т. е. имеем $recursive(Q(x,y))$.

Включим в реконструкцию доказательства все шесть условий на 14–19 строках с анализами строк в соответствующем порядке: «5», «определение 17», «определение 31», «Теорема I, 16, 15», «Теорема I, 17, 14», «Теорема II, 18», а также на 20 строке – утверждение $recursive(Q(x,y))$ с анализом: «Теорема III, 12, 19».

8. Читаем далее:

> Следовательно, в силу Теоремы V и (8), существует знак отношения q (со свободными переменными 17 и 19), такой, что
>
> $$\overline{x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]} \to Bew_\varkappa[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(y)})] \qquad (9)$$
>
> и
>
> $$x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})] \to Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(y)}))]. \qquad (10)$$

На этом шаге производятся одновременно две операции: 1) применение Теоремы V к $recursive(Q(x,y))$, и 2) применение к её результату утверждения (8), включённого нами в реконструкцию на строке 11. Реализуем их последовательно, включив результаты первой и второй операций в реконструкцию.

Уточним первую операцию. Теорема V гласит[21]:

> **Теорема V.** *Для каждого рекурсивного отношения $R(x_1,\ldots,x_n)$ существует некоторый n–местный знак отношения r (со свободными переменными $u_1,\ldots,u_n$), такой, что для любого n–кортежа чисел $(x_1,\ldots,x_n)$ мы имеем*
>
> $$R(x_1,\ldots,x_n) \to Bew[Sb(r^{u_1}_{Z(x_1)}\ {}^{\cdots}_{\cdots}\ {}^{u_n}_{Z(x_n)})],$$
>
> $$\overline{R(x_1,\ldots,x_n)} \to Bew[Neg(Sb(r^{u_1}_{Z(x_1)}\ {}^{\cdots}_{\cdots}\ {}^{u_n}_{Z(x_n)}))].$$

Символически теорему можно записать следующим образом:

$$\forall R(x_1,\ldots,x_n)\Big(recursive(R(x_1,\ldots,x_n))\ \supset$$
$$\exists r(u_1,\ldots,u_n),\forall x_1,\ldots,\forall x_n\Big\{\big(R(x_1,\ldots,x_n)\to Bew[Sb(r^{u_1}_{Z(x_1)}\ {}^{\cdots}_{\cdots}\ {}^{u_n}_{Z(x_n)})]\big)\ \&$$
$$\big(\overline{R(x_1,\ldots,x_n)}\to Bew[Neg(Sb(r^{u_1}_{Z(x_1)}\ {}^{\cdots}_{\cdots}\ {}^{u_n}_{Z(x_n)}))]\big)\Big\}\Big).$$

[21] Ibid., pp. 97–98.

Однако, прежде, чем приступать к анализу этого выражения, убедимся в том, что результирующая формула Теоремы V действительно суть данная формула. Гёдель приводит абрис доказательства этой теоремы. Мы погрузимся в него совсем немного, чтобы выяснить ответ на интересующий нас вопрос. Кратко доказательство этой теоремы состоит в следующем. Доказательство проводится для всех отношений $R(x_1, \ldots, x_n)$, обладающих формой $x_1 = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$, где φ – рекурсивная функция. Используется индукция по степени φ. Базисом выступает случай, когда степень φ равна 1, т. е. рассматриваются константы и функция $x+1$. Для этого случая теорема тривиально верна. Далее, пусть степень φ равна m. Тогда она получается из функций меньших степеней $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. В силу индуктивного предположения *для каждой из этих функций установлен соответствующий ей знак отношения* $r_1, \ldots, r_k$, о каждом из которых известно, что для него имеют место (3) и (4). *Знак отношения r получается из* $r_1, \ldots, r_k$ и можно доказать, что для него также имеют место (3) и (4). (Курсив наш. – *В. Ф.*)

Мы кратко воспроизвели абрис доказательства Теоремы V, выделив важные моменты, на которые нужно обратить внимание. При пристальном внимании, оказывается, что в выше приведённой формулировке теоремы опускается важное обстоятельство: для каждого рекурсивного отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$ существует *соответствующий ему* знак отношения r, для которого имеют место (3) и (4). Это обстоятельство нельзя упускать из внимания. Мы преобразуем символическую запись Теоремы V, согласуя её с только что сказанным, а именно, включив в неё указание на взамнооднозначное соответствие $R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrows r(u_1, \ldots, u_n)$:

$$\begin{aligned}
&\forall R(x_1, \ldots, x_n)\Big(recursive\big(R(x_1, \ldots, x_n)\big) \supset \\
&\exists r(u_1, \ldots, u_n)\Big(R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrows r(u_1, \ldots, u_n)\ \& \\
&\forall x_1, \ldots, \forall x_n \Big\{ \big(R(x_1, \ldots, x_n) \to Bew[Sb(r^{u_1}_{Z(x_1)} \, {}^{\cdots}_{\cdots} \, {}^{u_n}_{Z(x_n)})]\big)\ \& \\
&\qquad \big(\overline{R(x_1, \ldots, x_n)} \to Bew[Neg(Sb(r^{u_1}_{Z(x_1)} \, {}^{\cdots}_{\cdots} \, {}^{u_n}_{Z(x_n)}))]\big)\Big\}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Включим эту формулу в реконструкцию на 21 строке с анализом «Теорема V». Поскольку эту теорему неоходимо применить конкретно к отношению $Q(x, y)$, следующим шагом является удаление квантора всеобщности и конкретизация отношения $R(x_1, \ldots, x_n)$. В результате получим (22 строка реконструкции, анализ: «$\forall$–удаление, 21»):

$$\begin{aligned}
&recursive\big(Q(x,y))\big) \;\supset \\
&\exists q(u_1,u_2)\Big(Q(x,y) \leftrightarrows q(u_1,u_2)\ \& \\
&\forall x, \forall y\Big\{\big(Q(x,y) \to Bew[Sb(q^{u_1}_{Z(x)}\ {}^{u_2}_{Z(y)})]\big)\ \& \\
&\qquad\big(\overline{Q(x,y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{u_1}_{Z(x)}\ {}^{u_2}_{Z(y)}))]\big)\Big\}\Big).
\end{aligned}$$

Мы имеем на 20 строке $recursive\big(Q(x,y)\big)$. Применяем правило отсечения и имеем (на 23 строке реконструкции вместе с анализом: «*modus ponens*, 22, 20»):

$$\begin{aligned}
&\exists q(u_1,u_2)\Big(Q(x,y) \leftrightarrows q(u_1,u_2)\ \& \\
&\forall x, \forall y\Big\{\big(Q(x,y) \to Bew[Sb(q^{u_1}_{Z(x)}\ {}^{u_2}_{Z(y)})]\big)\ \& \\
&\qquad\big(\overline{Q(x,y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{u_1}_{Z(x)}\ {}^{u_2}_{Z(y)}))]\big)\Big\}\Big).
\end{aligned}$$

Теперь нам необходимо удалить квантор существования. Для этого нужно допустить взаимнооднозначное соответствие между $Q(x,y)$ и $q(17,19)$, т. е. формулу $Q(x,y) \leftrightarrows q(17,19)$. Взаимооднозначное соответствие между $Q(x,y)$ и $q(17,19)$ при наличии $Q(x,y)$ даёт также наличие знака отношения $q(17,19)$.

Включим это допущение на строке 24 с анализом «допущение».

Далее, прежде, чем удалить экзистенциальный квантор в формуле на строке 23, получим некоторые важные следствия из допущения $Q(x,y) \leftrightarrows q(17,19)$.

Что значит «быть рекурсивным отношением», мы знаем. А что значит «быть рекурсивным знаком отношения»? Ответ получим непосредственно у Гёделя[22]:

> Знак отношения, соответствующий рекурсивному отношению [...], будет называться рекурсивным,

т. е.:

$$recursive(r) \equiv recursive(R)\ \&\ R \leftrightarrows r,$$

[22] Ibid., p. 98.

где знак '$\leftrightarrows$' означает отношение взаимнооднозначного соответствия. Включим это тождество в реконструкцию на 25 строке с анализом «определение».

На строке 26 с анализом «подстановка $q(17, 19)$ вместо r, $Q(x, y)$ вместо R, 25». имеем тождество

$$recursive(q(17, 19)) \equiv recursive(Q(x, y)) \ \& \ Q(x, y) \leftrightarrows q(17, 19).$$

Теперь мы получим формулу, которая утверждает, что $q(17, 19)$ является рекурсивным знаком отношения.

Из определения на строке 26 с помощью правила $\equiv$–удаления получается импликация (строка 27, «$\equiv$–удаление, 26»):

$$recursive(Q(x, y)) \ \& \ Q(x, y) \leftrightarrows q(17, 19) \supset recursive(q(17, 19)).$$

Поскольку в реконструкции в отдельности получены $recursive(Q(x, y))$ (строка 20) и $Q(x, y) \leftrightarrows q(17, 19)$ (строка 24), на следующей 28 строке имеем конъюнкцию этих формул (с анализом «&–введение, 20, 24»): $recursive(Q(x, y)) \ \& \ Q(x, y) \leftrightarrows q(17, 19)$. Наконец, на 29 строке имеем: $recursive(q(17, 19))$ с анализом «*modus ponens*, 26, 28».

Теперь настало время удалить квантор существования. Коль скоро мы обладаем утверждением $Q(x, y) \leftrightarrows q(17, 19)$ формула

$$\begin{aligned}&\exists q(u_1, u_2)\Big(Q(x, y) \leftrightarrows q(u_1, u_2) \ \& \\ &\forall x, \forall y\Big\{\big(Q(x, y) \to Bew[Sb(q^{u_1}_{Z(x)} \ ^{u_2}_{Z(y)})]\big) \ \& \\ &\qquad\big(\overline{Q(x, y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{u_1}_{Z(x)} \ ^{u_2}_{Z(y)}))]\big)\Big\}\Big).\end{aligned}$$

может быть конкретизирована единственным образом (строка 30, «$\exists$–удаление, 23, 24, конкретизация переменных u_1 и u_2»):

$$\begin{aligned}&Q(x, y) \leftrightarrows q(17, 19) \ \& \\ &\forall x, \forall y\Big\{\big(Q(x, y) \to Bew[Sb(q^{17}_{Z(x)} \ ^{19}_{Z(y)})]\big) \ \& \\ &\qquad\big(\overline{Q(x, y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{17}_{Z(x)} \ ^{19}_{Z(y)}))]\big)\Big\}.\end{aligned}$$

По правилу &–удаления получаем в отдельности формулу (строка 31, «&–удаление, 30»):

$$\begin{aligned}&\forall x, \forall y\Big\{\big(Q(x, y) \to Bew[Sb(q^{17}_{Z(x)} \ ^{19}_{Z(y)})]\big) \ \& \\ &\qquad\big(\overline{Q(x, y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{17}_{Z(x)} \ ^{19}_{Z(y)}))]\big)\Big\}.\end{aligned}$$

Дважды удалим квантор всеобщности, получим:

$$\big(Q(x,y) \to Bew[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)})]\big) \ \&$$
$$\big(\overline{Q(x,y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)}))]\big).$$

Включим эту формулу в реконструкцию на строке 32 с анализом «дважды ∀–удаление, 31».

На строках 33 и 34 включим две формулы, полученные из этой &–удалением:

$$Q(x,y) \to Bew[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)})]$$

и

$$\overline{Q(x,y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)}))].$$

Две приведённые формулы являются результатами первой операции, т. е. результатами применения Теоремы V к $recursive(Q(x,y))$.

Перейдём к выражению второй операции. Утверждение (8) включено нами в реконструкцию на строке 11:

$$\forall x[Bew(x) \to Bew_{\varkappa}(x)].$$

Удалим квантор всеобщности двумя разными способами. В одном случае конкретизируем переменную x формулой $Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)})$, в другом – $Neg(Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)}))$. Тогда имеем:

$$Bew[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)})] \to Bew_{\varkappa}[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)})]$$

и

$$Bew[Neg(Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)}))] \to Bew_{\varkappa}[Neg(Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)}))].$$

Включим эти формулы в реконструкцию на строках 35 и 36 с анализом «∀–удаление, 11».

Из формул, включённых в реконструкцию на строках 33 и 34 и на строках 35 и 36, получим теперь, используя правило транзитивности отношения '→', следующие отношения:

$$Q(x,y) \to Bew_{\varkappa}[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)})]$$

и

$$\overline{Q(x,y)} \to Bew_{\varkappa}[Neg(Sb(q^{17}_{Z(x)}\ ^{19}_{Z(y)}))].$$

Включим эти формулы в реконструкцию на строках 37 и 38.

Две приведённые формулы являются результатами второй операции, т. е. результатами применения утверждения (8) к результатам первой операции.

Чтобы теперь получить из этих отношений заявленные в интуитивном доказательстве отношения:

$$\overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]} \rightarrow Bew_{\varkappa}[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(y)})]$$

и

$$x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})] \rightarrow Bew_{\varkappa}[Neg\ (Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(y)}))],$$

необходимо произвести последнее преобразование полученных отношений. Заменим подформулы тех отношений, которые были только что получены в результате двух рассмотренных операций, на им тождественные; для последнего используем тождество по определению (8.1), включённое нами в реконструкцию на строке 12, т. е. вместо $Q(x, y)$ поставим $\overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}$. Получим:

$$\overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]} \rightarrow Bew_{\varkappa}[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(y)})]$$

и

$$\overline{\overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}} \rightarrow Bew_{\varkappa}[Neg\ (Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(y)}))].$$

В последнем выражении двойное отрицание снимается правилом замены, применяя тождество закона двойного отрицания классической логики.

Включим все эти преобразования в реконструкцию доказательства.

9. Читаем далее:

Положим

$$p = 17\ Gen\ q \tag{11}$$

(p есть знак класса со свободной переменной 19) и

$$r = Sb(q^{19}_{Z(p)}) \tag{12}$$

> (r есть рекурсивный знак класса[23] со свободной переменной 17).

Равенства (11) и (12) полагаются как определения. Поскольку эти формулы в явном виде содержатся в интуитивном доказательстве, мы включаем их также в реконструкцию на строках 43 и 44 с анализом «определение».

На следующей 45 строке реконструкции поместим формулу, выражающую то обстоятельство, что r есть рекурсивный знак класса: $recursive(r)$. К этой формуле мы приходим следующим образом.

В формулировке теоремы читаем[24]:

> Для каждого [...] класса формул $\varkappa$ существуют *рекурсивные* знаки классов r, такие, что [...]

Понять, почему r является рекурсивным, поможет, во–первых, установленная ранее (см. строку 29) рекурсивность знака отношения $q(17, 19)$, а во–вторых – сноска 43 работы Гёделя[25].

Анализ для включения формулы $recursive(r)$ в реконструкцию на строке 45 – «Теорема I, 29, 44».

Здесь следует обратить особое внимание на то обстоятельство, что утверждение о рекурсивности знака класса r является результатом вывода из утверждения о рекурсивности знака отношения $q(17, 19)$. Положение же, что $q(17, 19)$ суть рекурсивный знак отношения, – как было показано ранее, – является следствием допущения о существовании взаимнооднозначного соответствия между $Q(x, y)$ и $q(u_1, u_2)$ (см. строки 24–29).

10. Читаем далее:

> Тогда мы имеем
>
> $$Sb(p^{19}_{Z(p)}) = Sb([17\ Gen\ q]^{19}_{Z(p)}) =$$

---

[23][Сноска 43 из Ibid., p. 99. – *В. Ф.*] Поскольку r получен из рекурсивного знака отношения q замещением переменной определённым числом p. [Конечная часть этой сноски (которая касается того, что не является необходимым в доказательстве), будучи установленной точно, выглядела бы следующим образом: "замещением переменной нумералом для p".]

[24]Ibid., p. 98.

[25]См. сноску 23 на этой странице. Отметим, что сноска 43 неявно содержит ссылку на Теорему I (см. Ibid., p. 93).

$$= 17\ Gen\ Sb(q^{19}_{Z(p)}) = 17\ Gen\ r \tag{13}$$

(в силу (11) и (12));[26]

Возобновляя последовательный характер изложения, разобьём данную цепь равенств на три равенства:

$$Sb(p^{19}_{Z(p)}) = Sb([17\ Gen\ q]^{19}_{Z(p)}),$$

$$Sb([17\ Gen\ q]^{19}_{Z(p)}) = 17\ Gen\ Sb(q^{19}_{Z(p)}),$$

$$17\ Gen\ Sb(q^{19}_{Z(p)}) = 17\ Gen\ r.$$

Разберём каждое из равенств.

Первое равенство суть трансформация по правилу замены подформулы p в силу введённого определения (11). Однако основание изначальной формулы, в которую осуществляется замена подформулы p, не ясно. Поскольку эта формула не является аксиомой, не введена посредством определения через ранее введённые формулы, и не получена по одному из правил вывода из предшествующих формул (сам Гёдель обходит вниманием основание для появления в реконструкции формулы $Sb(p^{19}_{Z(p)})$), необходимо признать её в качестве допущения. Следовательно, прежде, чем вводить в доказательство равенства, необходимо явно указать на обнаруженное допущение. Включим допущение на 46 строке с соответствующим анализом.

Первое равенство включим в реконструкцию на 47 строке с анализом «правило замены, 46, 43».

Для появления второго равенства полностью элиминировать интуитивные (содержательные, иначе: касающиеся значения использующихся при записи формул символов) моменты при оперировании формулами нет возможности. Во всяком случае, гёделева система P не позволяет это сделать. Суть преобразования состоит в том, что посредством некоторой интуиции усматривается тот факт, что если подстановка $Sb([17\ Gen\ q]^{19}_{Z(p)})$ возможна, то она возможна в отношении свободной переменной 19 знака отношения q, но невозможна в отношении знаков 17 и Gen. В отношении первого знака имеет место несовпадение имени переменной, в отношении второго – Gen и вовсе

[26][Сноска 44 из Ibid., p. 99. – *В. Ф.*] Операции Gen и Sb всегда могут заменяться друг другом в случае, если они относятся к разным переменным.

не является переменной. Поэтому выражение $Sb([17\ Gen\ q]^{19}_{Z(p)})$ можно редуцировать до выражения $17\ Gen\ Sb(q^{19}_{Z(p)})$. Именно этот факт выражается вторым равенством. Включим второе равенство в реконструкцию на 48 строке с анализом «$17 \neq 19$, $\overline{Var(Gen)}$, 47».

Наконец, третье равенство суть вновь трансформация по правилу замены подформулы $Sb(q^{19}_{Z(p)})$ в силу введённого определения (12). Включим равенство в реконструкцию на 49 строке с анализом «правило замены, 44, 48».

Кроме того, правило транзитивности отношения равества '$=$' позволяет получить из трёх рассмотренных равенств четвёртое: $Sb(p^{19}_{Z(p)}) = 17\ Gen\ r$. Оно же завершает неявное участие допущения, которое было сделано на 39 строке. Включим четвёртое равенство в вывод на строке 50 с анализом «дважды транзитивность '$=$', 47–49, удаление допущения 46».

Отметим, что последние два равенства дают нам формулу $17\ Gen\ r$, которая признана в конце интуитивного доказательства неразрешимой на основании класса $\varkappa$. Следует обратить также внимание на то, что эта формула, действительно (как отмечала Франческа Гвиди) является производной от допускаемой формулы $Q(x, y)$. Это становится очевидно из проведённого анализа формул, включенных в реконструкцию на строках 12–50.

11. Читаем далее:

> более того
> $$Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(p)}) = Sb(r^{17}_{Z(x)}) \tag{14}$$
> (в силу (12)).

Следуя сноске 37[27]:

> Вместо $Sb[Sb(x^v_y)^\omega_z]$ мы пишем $Sb(x^v_y\ {}^\omega_z)$ (и похожим образом для любого количества переменных более 2),

преобразуем формулу $Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(p)})$ в первоначальный вид: $Sb[Sb(q^{17}_{Z(x)})^{19}_{Z(p)}]$. Поскольку же переменные 17 и 19 не одна и та же переменная, постольку порядок подстановки не имеет никакого значения: сначала подстановка терма $Z(x)$ вместо переменной 17

[27] Ibid., p. 96.

или подстановка терма $Z(p)$ вместо переменной 19. В силу последнего, имеем: $Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(p)}) \equiv Sb(q^{19}_{Z(p)}\ {}^{17}_{Z(x)})$. Последнее же означает: $Sb[Sb(q^{17}_{Z(x)})^{19}_{Z(p)}] \equiv Sb[Sb(q^{19}_{Z(p)})^{17}_{Z(x)}]$. Результируя сказанное, имеем формулу (на 51 строке реконструкции с анализом «сноска 37»):

$$Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(p)}) \equiv Sb[Sb(q^{19}_{Z(p)})^{17}_{Z(x)}].$$

Имея в виду равенство (12), применим к данной формуле правило замены. Тогда получим равенство (14), которое включим в реконструкцию на 52 строке с анализом «правило замены, 44, 51».

12. Читаем далее:

> Если мы теперь подставим p вместо y в (9) и (10) и примем во внимание (13) и (14), мы получим
>
> $$\overline{x\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)} \rightarrow Bew_{\varkappa}[Sb(r^{17}_{Z(x)})], \tag{15}$$
>
> $$x\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r) \rightarrow Bew_{\varkappa}[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(x)}))]. \tag{16}$$

Произведём последовательно операцию подстановки в (9) и (10) и применение утверждений (13) и (14). Операция подстановки p вместо y производится в формулы, включенные в реконструированное доказательство на строках 39 и 42. В результате имеем:

$$\overline{x\ B_{\varkappa}\ [Sb(p^{19}_{Z(p)})]} \rightarrow Bew_{\varkappa}[Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(p)})],$$

и

$$x\ B_{\varkappa}\ [Sb(p^{19}_{Z(p)})] \rightarrow Bew_{\varkappa}[Neg\ (Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(p)}))].$$

Включим полученные формулы на строках 53 и 54 с анализом «подстановка p вместо y, 39» и «подстановка p вместо y, 42» соответственно.

Теперь применим утверждения (13) и (14):

$$Sb(p^{19}_{Z(p)}) = Sb([17\ Gen\ q]^{19}_{Z(p)}) = 17\ Gen\ Sb(q^{19}_{Z(p)}) = 17\ Gen\ r,$$

$$Sb(q^{17}_{Z(x)}\ {}^{19}_{Z(p)}) = Sb(r^{17}_{Z(x)}).$$

Используя эти утверждения, с помощью правила замены получим:

$$\overline{x\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)} \rightarrow Bew_{\varkappa}[Sb(r^{17}_{Z(x)})],$$

и

$$x\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r) \rightarrow Bew_{\varkappa}[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(x)}))].$$

Включим полученные формулы на строках 55 и 56 с анализом «дважды правило замены, 53, 50, 52» и «дважды правило замены, 54, 50, 52» соответственно.

13. Читаем далее:

> Это даёт:
>
> 1. 17 $Gen\ r$ не является $\varkappa$–доказуемой.[28]

Мы подошли к центральной части подлинного доказательства теоремы о неполноте. Эта часть воспроизводит структуру рассуждений типа «парадокс Лжеца». Для лучшей обозримости структуры всего доказательства в целом обозначим рамкой эту часть доказательства, – ядро, – которая включает в себя два последовательных подвывода, обозначенные в интуитивном доказательстве цифрами 1 и 2. Из интуитивного доказательства понятно, что введённое суждение будет получено в результате нижеследующего первого подвывода. Метод доказательства в этом подвыводе – метод от обратного. Из сноски понятно, что символизация этого суждения выглядит следующим образом: $\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)}$. Эту формулу мы включим в реконструкцию на месте результирующей формулы первого подвывода.

14. Читаем далее:

> Если бы это было не так, то нашёлся бы такой n, что имела бы место $n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)$.

Здесь два момента:
1) Допущение обратного, а именно: $Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)$. Включим эту формулу в реконструкцию на строке 57 с анализом «допущение».
2) Утверждение того, что существует такой n, что имела бы место $n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)$. Это утверждение получается из утверждения (6.1), которое включено в реконструкцию на строке 6, следующим образом. Подстановка в (6.1) вместо x формулы 17 $Gen\ r$ даёт:

$$Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \equiv \exists y(y\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)).$$

[28] [Сноска 45 из Ibid., p. 99. – *В. Ф.*] Под “x является $\varkappa$–доказуемым” мы понимаем $x\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)$, что, в силу (7), означает то же самое, что и $Bew_{\varkappa}(x)$.

Включим эту формулу в реконструкцию на строке 58 с анализом «подстановка 17 $Gen\ r$ вместо x, 6».

Далее преобразуем эту эквивалентность сначала по правилу $\equiv$–удаления в импликацию $Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \supset \exists y(y\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))$, а затем по правилу отсечения получим отдельно консеквент этой импликации $\exists y(y\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))$. Обе формулы включим в реконструкцию на строках 59 и 60. Анализом первой будет «$\equiv$–удаление, 58», а второй – «*modus ponens*, 59, 57».

Для того, чтобы от последней формулы перейти к формуле $n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)$, необходимо удалить квантор существования. Это возможно только при условии, что будет сделано соответствующее допущение. В данном случае необходимо допустить $n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)$. Включим эту формулу в реконструкцию на строке 61 с анализом «допущение». Имея в виду последнее допущение и используя правило $\exists$–удаления к формуле $\exists y(y\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))$, переходим к формуле $n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)$. Последняя включается нами в реконструкцию на строке 62 с анализом «$\exists$–удаление, 60, 61».

15. Читаем далее:

> Следовательно, в силу (16) мы бы имели $Bew_{\varkappa}[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(n)}))]$, в то время как, с другой стороны, из $\varkappa$–доказуемости 17 $Gen\ r$ следует $Sb(r^{17}_{Z(n)})$.

Здесь также два момента:

1) Непосредственно применить утверждение (16), включенное нами в реконструкцию на строке 56, мы не можем без предварительной подстановки терма n вместо переменной x. Включим результат этой подстановки на строке 63 с анализом «подстановка n вместо x, 56». С помощью правила отсечения из предыдущих формул получаем $Bew_{\varkappa}[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(n)}))]$. Включим эту формулу на строке 64 с анализом «*modus ponens*, 63, 62».

2) Из $\varkappa$–доказуемости 17 $Gen\ r$ следует $Sb(r^{17}_{Z(n)})$. Символически: $Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \to Bew_{\varkappa}(Sb(r^{17}_{Z(n)}))$. Для того, чтобы получить $\varkappa$–доказуемость $Sb(r^{17}_{Z(n)})$ из $\varkappa$–доказуемости 17 $Gen\ r$, можно пойти двумя путями.

С одной стороны, в гёделевой формальной системе P аксиомой, в частности, является любая формула, полученная из следующей схемы: $v\Pi(a) \supset\ Subst\ a\binom{v}{c}$ когда для a, v и c сделаны подстановки (и операция, обозначенная с помощью ‘Subst’, является выполненной). Поставим в схему вместо a знак класса r, вместо v поставим 17, а вместо c поставим знак $Z(n)$. В результате подстановки получим $17\ \Pi(r) \supset\ Subst\ r\binom{17}{Z(n)}$. А поскольку[29]

> $Sb(x^v_y)$ есть понятие $Subst\ a\binom{v}{b}$,

и $17\ Gen\ r$ суть то же самое, что $17\ \Pi(r)$, т. е. имеет место тождество: $17\ Gen\ r\ \equiv\ 17\ \Pi(r)$, то последнюю аксиому можем переписать следующим образом: $17\ Gen\ r\ \supset\ Sb(r^{17}_{Z(n)})$. Коль скоро эта формула суть аксиома, она тривиально доказуема, а в силу (8) – $\varkappa$–доказуема. Имея в отдельности как $\varkappa$–доказуемость $17\ \Pi(r)$, так и $\varkappa$–доказуемость $17\ \Pi(r)\ \supset\ Sb(r^{17}_{Z(n)})$, имеем по правилу отсечения $\varkappa$–доказуемость $Sb(r^{17}_{Z(n)})$, т. е. ту формулу, которую нам нужно получить.

С другой стороны, формула $Bew_\varkappa(17\ Gen\ r) \rightarrow Bew_\varkappa(Sb(r^{17}_{Z(n)}))$ является истинной по правилам логики. Вновь имея в отдельности как $\varkappa$–доказуемость $17\ Gen\ r$, так и следование из неё $\varkappa$–доказуемости $Sb(r^{17}_{Z(n)})$, имеем по правилу отсечения отлельно $\varkappa$–доказуемость $Sb(r^{17}_{Z(n)})$.

Реализуем в реконструкции второй вариант получения $\varkappa$–доказуемости $Sb(r^{17}_{Z(n)})$. Для этого включим на 65 строке формулу $Bew_\varkappa(17\ Gen\ r) \rightarrow Bew_\varkappa(Sb(r^{17}_{Z(n)}))$ с анализом «правило логики», а на строке 66 – $Bew_\varkappa(Sb(r^{17}_{Z(n)}))$ с анализом «*modus ponens*, 65, 57».

16. Читаем далее:

> Следовательно, $\varkappa$ является противоречивым (и, тем более, ω–противоречивым).

Здесь под противоречивостью $\varkappa$ понимается появление в классе $\varkappa$ противоречия. Чтобы явным образом показать появление этого противоречия, включим на строке 67 реконструкции с соответствующим анализом формулу, которая получается в результате применения правила &–введения к формулам, стоящим на строках 64 и 66:

$$Bew_\varkappa(Sb(r^{17}_{Z(n)}))\ \&\ Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(n)}))].$$

[29]Ibid., p. 96.

Комментарий, который Гёдель дал здесь в скобках можно прокомментировать следующей ремаркой из той же работы[30]:

> Всякая ω–непротиворечивая система, конечно, является непротиворечивой.

По правилу контрапозиции мы имеем также: всякая противоречивая система является ω–противоречивой. Именно это обстоятельство замечено в скобках.

Появление противоречия позволяет на основании метода *reductio ad absurdum* перейти к опровержению допущения, которое было сделано в начале первого подвывода, а именно: допущения $Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)$. Опровержение этого допущения будет записано как $\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)}$. Эта формула замыкает первый подвывод ядра доказательства, т. е. является результирующей. Как было обещано выше, мы включаем её в реконструкцию на строке 68 с анализом «удаление допущения, 57».

17. Читаем далее:

> 2. $Neg(17\ Gen\ r)$ не является $\varkappa$–доказуемой.

Здесь цифра 2 означает начало второго подвывода ядра доказательства. Результирующей формулой этого подвывода является формула, выражающая, что $Neg(17\ Gen\ r)$ не является $\varkappa$–доказуемой. Придадим результирующей формуле символическую форму: $\overline{Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))}$. Так же, как и в первом подвыводе, результирующая формула будет включена в реконструкцию по завершении подвывода.

То обстоятельство, что доказательство будет вестись методом от обратного, здесь явно не указано. Но из дальнейшего хода интуитивного доказательства ясно, что здесь используется именно этот метод и предполагается допущение обратного, т. е.: $Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))$. Включим это допущение на строке 69 с соответствующим анализом «допущение».

18. Читаем далее:

> Доказательство: Как только что было доказано, 17 $Gen\ r$ не является $\varkappa$–доказуемой; т. е. (в силу (6.1)), имеет место $(n)(\overline{n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)})$.

[30] Ibid., p. 98.

Необходимо отметить, что доказательство здесь начинается с обращения к результату предыдущего подвывода. Это означает, что этот подвывод является *зависимым* от первого подвывода. Эта зависимость приводит к следующему обстоятельству. Если начать ядро доказательства не с первого, а со второго допущения, мы не сможем прийти к результирующему (противоречивому) результату двух подвыводов[31].

Покажем, каким образом получается формула

$$\forall n(\overline{n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)}).$$

Эта формула получается из утверждения (6.1), включенного в реконструкцию на строке 6. Для этого переменная y заменяется на переменную n, а вместо переменной x осуществляется подстановка формулы 17 $Gen\ r$. В результате этих двух преобразований имеем:

$$Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \equiv \exists n(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)).$$

Включим эту формулу на строке 70 с анализом «подстановка n вместо y, 17 $Gen\ r$ вместо x, 6».

Имея последнюю формулу, по правилам логики, имеем:

$$\big[Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \equiv \exists n(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))\big] \supset$$

$$\big[\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)} \equiv \overline{\exists n(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))}\big].$$

Включим эту формулу на строке 71 с анализом «правило логики». Далее, сначала с помощью правила отсечения получим в отдельности

[31]На это обратил своё внимание Питер Сьюбер в своём курсе по Логическим системам (2002–2003) (см. Suber P. Gödel's proof. URL: http://www.earlham.edu/~peters/courses/logsys/g–proof.htm):

> Интересно отметить, что пока гипотеза, что формула G является доказуемой, не приводит к противоречию, гипотеза, что формула G не является доказуемой, не приводит к противоречию. [...] В этом состоит важная разница между утверждением G и парадоксом Лжеца: утверждение Лжеца приводит к противоречию безотносительно к тому, допускаем ли мы его или его отрицание. G приводит к противоречию, только если мы предполагаем её доказуемой, но не когда предполагаем обратное.

Несмотря на то, что сказанное Сьюбером касается авторефлексивной формулы G, т. е. относится к модифицированному доказательству Первой теоремы, это же касается и подлинного доказательства.

консеквент последней импликации (строка 72, «*modus ponens*, 71, 70»); затем применим к последней формуле правило ≡–удаления и получим импликацию (строка 73, «≡–удал., 72»):

$$\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)} \supset \overline{\exists n(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))}.$$

Именно теперь потребуется результат предыдущего подвывода. Для того, чтобы применить к последней импликации правило отсечения, нам необходимо знание того, что имеет место её антецедент, $\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)}$ (т. е. та формула, которая результировала первый подвывод ядра доказательства). Как видно из интуитивного доказательства, отдельно консеквент импликации получается с привлечением предыдущего результата. Включим этот шаг на строке 74 с анализом «*modus ponens*, 73, 68». Далее, правило замены кванторов позволяет перейти к формуле $\forall n(\overline{n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)})$ (строка 75, «замена квантора ∃ на ∀, 74»).

19. Читаем далее:

> Из этого следует, в силу (15), $(n)Bew_{\varkappa}[Sb(r^{17}_{Z(n)})]$,

Формула, которую нужно получить:

$$\forall n(Bew_{\varkappa}[Sb(r^{17}_{Z(n)})]).$$

Получить её необходимо с помощью утверждения (15), включенного в реконструкцию на строке 55: $\overline{x\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)} \to Bew_{\varkappa}[Sb(r^{17}_{Z(x)})]$. Сначала осуществим подстановку в это утверждение переменной n вместо переменной x (строка 76, «подстановка n вместо x, 55»). Дважды введём квантор всеобщности в получившуюся импликацию. Получим $\forall n(\overline{n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)}) \to \forall n(Bew_{\varkappa}[Sb(r^{17}_{Z(n)})])$. Включим эту формулу в реконструкцию на строке 77 с анализом «дважды ∀–введение, 76».

По правилу отсечения из двух предшествующих формул получим $\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(r^{17}_{Z(n)}))]$, которую включим в вывод на строке 78 с анализом «*modus ponens*, 77, 75».

20. Читаем далее:

> и которая вместе с $Bew_{\varkappa}[Neg\ (17\ Gen\ r)]$ является несовместимым с ω–непротиворечивостью $\varkappa$.

Покажем, почему $\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(r^{17}_{Z(n)}))]$ вместе с $Bew_{\varkappa}[Neg\ (17\ Gen\ r)]$ является несовместимым с ω–непротиворечивостью $\varkappa$. Для начала символизируем это «вместе». Для этого на 79 строке введём конъюнкцию этих двух формул с анализом «&–введение, 69, 78, ω–противоречие». По отношению к получившейся конъюнкции осуществим два следующих преобразования: заменим переменную 17 на переменную υ, а также применим правило $\exists$–введения. Получим формулу

$$\exists a\{\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)}))]\ \&\ Bew_{\varkappa}(Neg\ (\upsilon\ Gen\ a))\}.$$

Включим её на строке 80 с анализом «подстановка υ вместо 17, $\exists$–введение, 72».

Из определения на строке 10 элиминируем знак эквивалентности и получим формулу:

$$_{\omega}consist\{\varkappa\} \supset \overline{\exists a\big\{\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)}))]\ \&\ Bew_{\varkappa}(Neg(\upsilon\ Gen\ a))\big\}}.$$

По правилу отсечения получим отдельно консеквент этой импликации. Эти две формулы включим в реконструкцию на строках 81 и 82 с соответствующими анализами.

Теперь мы можем получить противоречие в его явной форме. Для этого образуем конъюнкцию формул, стоящих на строках 80 и 82. Результат включим в реконструкцию на строке 83 с анализом «&–введение, 80, 82, противоречие».

Появление противоречия позволяет на основании метода *reductio ad absurdum* перейти к опровержению допущения, которое было сделано в начале второго подвывода, а именно: допущения $Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))$. Опровержение этого допущения будет записано как $\overline{Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))}$. Эта формула замыкает второй подвывод ядра доказательства, т. е. является результирующей. Включим её в реконструкцию на строке 84 с анализом «удаление допущения 69».

21. Читаем далее:

> 17 *Gen r* является, таким образом, неразрешимой на основании $\varkappa$ и обосновывает Теорему VI.

Формула 17 *Gen r* является неразрешимой, или, иначе: не является ни доказуемой, ни опровержимой. Для того, чтобы это обстоятельство увидеть в явном виде, с помощью правила &–введения объединим результаты обоих подвыводов ядра доказательства в один результат. Получим формулу (строка 85, «&–введение, 68, 84, противоречие»):

$$\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)}\ \&\ \overline{Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))}.$$

Осталось получить результирующее выражение всей теоремы, которое мы символизировали в самом начале II. Для этого нужно несколько дополнительных преобразований. Получим сначала из утверждения (7), включенного в реконструкцию на строке 7, с помощью правила ∀–удаления два тождества:

$$Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \equiv (17\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa),$$

и

$$Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r)) \equiv (Neg(17\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa).$$

Включим их на строках 86 и 87 с анализами: «∀–удаление, 7, $x = 17\ Gen\ r$» и «∀–удаление, 7, $x = Neg(17\ Gen\ r)$» соответственно.

Получим тождества, инверсные этим двум. Сначала по правилам логики имеем две следующие импликации:

$$\big[Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \equiv (17\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)\big] \supset$$

$$\big[\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)} \equiv \overline{(17\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\big],$$

и

$$\big[Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r)) \equiv (Neg(17\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)\big] \supset$$

$$\big[\overline{Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))} \equiv \overline{(Neg(17\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\big].$$

Включим эти импликации на строках 88 и 89 с одинаковым анализом: «правило логики». Затем из двух этих импликаций и двух выше приведённых формул по правилу отсечения имеем в отдельности консеквенты двух последних импликаций:

$$\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)} \equiv \overline{(17\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)},$$

и

$$\overline{Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))} \equiv \overline{(Neg(17\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}.$$

Включим полученные консеквенты на строках 90 и 91 с анализами соответственно: «*modus ponens*, 88, 86» и «*modus ponens*, 89, 87». Эти тождества позволяют дважды применить правило замены к конъюнкции на строке 85 и включить на 92 строке реконструкции следующую конъюнкцию:

$$\overline{(17\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\ \&\ \overline{(Neg(17\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}.$$

Далее, подставим в эту формулу вместо переменной 17 переменную υ, получим:

$$\overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\ \&\ \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}.$$

Включим эту формулу на строке 93 с анализом «подстановка υ вместо 17, 92».

Настало время удалить допущения. В данный момент реконструкцию сопровождают четыре введённых ранее допущения:

1) $recursive(\varkappa)$;
2) $_{\omega}consist(\varkappa)$;
3) $Q(x, y)$;
4) $Q(x, y) \rightleftarrows q(17, 19)$.

Первые два допущения являются явными допущеними (т. е. они содержатся в интуитивном доказательстве в явном виде); вторые два – неявные допущения, восстановленные в ходе реконструкции.

Напомним, какой должна быть результирующая формула доказательства Теоремы VI:

$$\forall\varkappa,\ \exists r\Big[\big(recursive(\varkappa)\quad\&\quad {_{\omega}consist}(\varkappa)\quad\&\quad recursive(r)\big)\supset \overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\quad\&\quad\overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\Big].$$

Необходимо обратить внимание на антецедент импликации в подкванторном выражении этой формулы. Два члена этой конъюнкции являются допущениями 1 и 2. Третий член, – $recursive(r)$, как было установлено в ходе реконструкции, – является следствием рекурсивности знака отношения $q(17, 19)$. Положение же, что $q(17, 19)$ – рекурсивный знак отношения, является следствием допущения 4 о существовании взаимнооднозначного соответствия между $Q(x, y)$ и $q(u_1, u_2)$ (см. строки 24–29).

Сначала удалим допущения 1 и 2, стоящие в реконструкции на строках 1 и 3. Для этого дважды применим правило $\supset$–введения. Сначала получим (строка 94, «$\supset$–введение, 93, удаление допущения, 1»):

$$recursive(\varkappa) \supset \overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)} \ \ \& \ \ \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}.$$

Затем (строка 95, «$\supset$–введение, 94, удаление допущения, 3»):

$$_{\omega}consist(\varkappa) \supset \big(recursive(\varkappa) \supset \overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)} \ \ \& \ \ \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\big).$$

Применим к последней формуле правило импортации, имеем (строка 96, «импортация, 95»):

$$\big(_{\omega}consist(\varkappa)\ \&\ recursive(\varkappa)\big) \supset \overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)} \ \ \& \ \ \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}.$$

По законам логики общезначимой является следующая формула исчисления высказываний (строка 97, «правило логики»):

$$A\ \&\ B\ \&\ C \supset A\ \&\ B.$$

Преобразуем эту формулу. Осуществим следующую подстановку: вместо пропозициональной буквы A поставим $_{\omega}consist(\varkappa)$, вместо B поставим $recursive(\varkappa)$, а вместо C – $recursive(r)$. Получим (строка 98, «подстановка $A = {_{\omega}consist(\varkappa)}$, $B = recursive(\varkappa)$, $C = recursive(r)$, 97»):

$$_{\omega}consist(\varkappa)\ \&\ recursive(\varkappa)\ \&\ recursive(r) \supset {_{\omega}consist(\varkappa)}\ \&\ recursive(\varkappa).$$

По правилу цепного заключения в силу транзитивности отношения импликации, имеем (строка 99, «транзитивность '$\supset$', 98, 96»):

$$\big(_{\omega}consist(\varkappa)\ \&\ recursive(\varkappa)\ \&\ recursive(r)\big) \supset \overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)} \ \ \& \ \ \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}.$$

Введём кванторы существования и всеобщности. Сначала получим (строка 100, «$\exists$–введение, 99»):

$$\exists r\Big[\big(recursive(\varkappa)\quad \&\quad {}_{\omega}consist(\varkappa)\quad \&\quad recursive(r)\big)\supset \overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\quad \&\quad \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\Big],$$

а затем (строка 101, «$\forall$–введение., 100»):

$$\forall\varkappa,\ \exists r\Big[\big(recursive(\varkappa)\quad \&\quad {}_{\omega}consist(\varkappa)\quad \&\quad recursive(r)\big)\supset \overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\quad \&\quad \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\Big].$$

Последняя формула есть результирующая формула доказательства Теоремы VI. Ею завершается II часть реконструкции интуитивного доказательства Теоремы.

Теперь настало время представить результат проведённой реконструкции. Это будет сделано в третьей части реконструкции.

III

В результате проведённой реконструкции (см. II) вышло следующее реконструированное доказательство Первой теоремы К. Гёделя о неполноте.

№	**Шаги доказательства**	**Анализ**
1.	$recursive(\varkappa)$	допущение
2.	$\underline{{}_{\omega}consist(\varkappa)\equiv}$ $\exists a\left(\forall n[Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)})\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)]\ \&\ [Neg(\upsilon\ Gen\ a)]\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)\right)$	определение
3.	${}_{\omega}consist(\varkappa)$	допущение
4.	$Bw_{\varkappa}(x)\equiv\forall n\ [n\ \leqq\ l(x)\to\ Ax(n\ Gl\ x)\ \vee\ (n\ Gl\ x)\ \varepsilon\ \varkappa$ $\vee\ \exists p,\ q\{0<p,\ q<n\ \&\ Fl(n\ Gl\ x,\ p\ Gl\ x,\ q\ Gl\ x)\}]\ \&$ $l(x)>0$	определение, Опр. 44
5.	$x\ B_{\varkappa}\ y\equiv Bw_{\varkappa}(x)\ \&\ [l(x)]\ Gl\ x=y$	определение, Опр. 45
6.	$Bew_{\varkappa}(x)\equiv\exists y(y\ B_{\varkappa}\ x)$	определение, Опр. 46
7.	$\forall x[Bew_{\varkappa}(x)\equiv x\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)]$	без анализа
8.	$Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)})\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)\equiv Bew_{\varkappa}(Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)}))$	$\forall$–удал., 7, $x=Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)})$
9.	$Neg(\upsilon\ Gen\ a)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)\equiv Bew_{\varkappa}(Neg(\upsilon\ Gen\ a))$	$\forall$–удал., 7, $x=Neg(\upsilon\ Gen\ a)$
10.	$\underline{{}_{\omega}consist\{\varkappa\}\equiv}$ $\exists a\left(\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)}))]\ \&\ Bew_{\varkappa}(Neg(\upsilon\ Gen\ a))\right)$	пр–ло зам., 2, 8, 9

11.	$\forall x[Bew(x) \to Bew_\varkappa(x)]$	без анализа
12.	$Q(x,y) \equiv \overline{x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}$	определение
13.	$Q(x,y)$	допущение
14.	$recursive(x\ B_\varkappa\ y)$	5
15.	$recursive(Z(y))$	Опр. 17
16.	$recursive(Sb(y^z_x))$	Опр. 31
17.	$recursive(Sb(y^{19}_{Z(y)}))$	Теорема I, 16, 15
18.	$recursive(x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})])$	Теорема I, 17, 14
19.	$recursive(\overline{x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]})$	Теорема II, 18
20.	$recursive(Q(x,y))$	Теорема III, 12, 19
21.	$\forall R(x_1,\ldots,x_n)\Big(recursive\big(R(x_1,\ldots,x_n)\big) \supset$ $\exists r(u_1,\ldots,u_n)\Big(R(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrows r(u_1,\ldots,u_n)\ \&$ $\forall x_1,\ldots,\forall x_n\Big\{\big(R(x_1,\ldots,x_n) \to Bew[Sb(r^{u_1\ \cdots\ u_n}_{Z(x_1)\ \cdots\ Z(x_n)})]\big)$ $\&\big(\overline{R(x_1,\ldots,x_n)} \to Bew[Neg(Sb(r^{u_1\ \cdots\ u_n}_{Z(x_1)\ \cdots\ Z(x_n)}))]\big)\Big\}\Big)\Big)$	Теорема V
22.	$recursive\big(Q(x,y)\big)) \supset$ $\exists q(u_1,u_2)\Big(Q(x,y) \leftrightarrows q(u_1,u_2)\ \&$ $\forall x,\forall y\Big\{\big(Q(x,y) \to Bew[Sb(q^{u_1\ \ u_2}_{Z(x)\ Z(y)})]\big)\ \&$ $\big(\overline{Q(x,y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{u_1\ \ u_2}_{Z(x)\ Z(y)}))]\big)\Big\}\Big)$	$\forall$–удал., 21
23.	$\exists q(u_1,u_2)\Big(Q(x,y) \leftrightarrows q(u_1,u_2)\ \&$ $\forall x,\forall y\Big\{\big(Q(x,y) \to Bew[Sb(q^{u_1\ \ u_2}_{Z(x)\ Z(y)})]\big)\ \&$ $\big(\overline{Q(x,y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{u_1\ \ u_2}_{Z(x)\ Z(y)}))]\big)\Big\}\Big)$	*m.p.* , 22, 20
24.	$Q(x,y) \leftrightarrows q(17,19)$	допущение
25.	$recursive(r) \equiv recursive(R)\ \&\ R \leftrightarrows r$	определение
26.	$recursive(q(17,19)) \equiv$ $recursive(Q(x,y))\ \&\ Q(x,y) \leftrightarrows q(17,19)$	подст. $q(17,19)$ вм. r, $Q(x,y)$ вм. R, 24
27.	$recursive(Q(x,y))\ \&\ Q(x,y) \leftrightarrows q(17,19) \supset$ $recursive(q(17,19))$	$\equiv$–удал., 26
28.	$recursive(Q(x,y))\ \&\ Q(x,y) \leftrightarrows q(17,19)$	&–введ., 20, 24
29.	$recursive(q(17,19))$	*m.p.* , 26, 28
30.	$Q(x,y) \leftrightarrows q(17,19)\ \&$ $\forall x,\forall y\Big\{\big(Q(x,y) \to Bew[Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)})]\big)\ \&$ $\big(\overline{Q(x,y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)}))]\big)\Big\}$	$\exists$–удал., 23, 24, конкр. перем. u_1 и u_2
31.	$\forall x,\forall y\Big\{\big(Q(x,y) \to Bew[Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)})]\big)\ \&$ $\big(\overline{Q(x,y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)}))]\big)\Big\}$	&–удаление, 30
32.	$\big(Q(x,y) \to Bew[Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)})]\big)\ \&$ $\big(\overline{Q(x,y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)}))]\big)$	2–$\forall$–удал., 31
33.	$Q(x,y) \to Bew[Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)})]$	&–удал., 32
34.	$\overline{Q(x,y)} \to Bew[Neg(Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)}))]$	&–удал., 32
35.	$Bew[Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)})] \to Bew_\varkappa[Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)})]$	$\forall$–удал., 11,

36.	$Bew[Neg(Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)}))] \to Bew_\varkappa[Neg(Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)}))]$	$x = Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)})$ ∀–удал., 11, $x = Neg(Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)}))$
37.	$Q(x,y) \to Bew_\varkappa[Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)})]$	транз. '$\to$', 33, 35
38.	$\overline{Q(x,y)} \to Bew_\varkappa[Neg(Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)}))]$	транз. '$\to$', 34, 36
39.	$\overline{x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]} \to Bew_\varkappa[Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)})]$	пр–ло зам., 37, 12
40.	$\overline{\overline{x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}} \to Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)}))]$	пр–ло зам., 38, 12
41.	$\overline{\overline{x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]}} \equiv x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})]$	пр–ло логики
42.	$x\ B_\varkappa\ [Sb(y^{19}_{Z(y)})] \to Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(y)}))]$	пр–ло зам., 40, 41
43.	$p = 17\ Gen\ q$	определение
44.	$r = Sb(q^{19}_{Z(p)})$	определение
45.	$recursive(r)$	Теорема I, 29, 44
46.	$Sb(p^{19}_{Z(p)})$	допущение
47.	$Sb(p^{19}_{Z(p)}) = Sb([17\ Gen\ q]^{19}_{Z(p)})$	пр–ло зам., 46, 43
48.	$Sb([17\ Gen\ q]^{19}_{Z(p)}) = 17\ Gen\ Sb(q^{19}_{Z(p)})$	$17 \neq 19$, $\overline{Var(Gen)}$, 47
49.	$17\ Gen\ Sb(q^{19}_{Z(p)}) = 17\ Gen\ r$	пр–ло зам., 44, 48
50.	$Sb(p^{19}_{Z(p)}) = 17\ Gen\ r$	2–транз. '=', 47–49
51.	$Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(p)}) \equiv Sb[Sb(q^{19}_{Z(p)})^{17}_{Z(x)}]$	удал. доп. 46 сноска 37[32]
52.	$Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(p)}) = Sb(r^{17}_{Z(x)})$	пр–ло зам., 44, 51
53.	$\overline{x\ B_\varkappa\ [Sb(p^{19}_{Z(p)})]} \to Bew_\varkappa[Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(p)})]$	подст. p вм. y, 39
54.	$x\ B_\varkappa\ [Sb(p^{19}_{Z(p)})] \to Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(q^{17\ \ 19}_{Z(x)\ Z(p)}))]$	подст. p вм. y, 42
55.	$\overline{x\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r)} \to Bew_\varkappa[Sb(r^{17}_{Z(x)})]$	2–пр–ло зам., 53, 50, 52
56.	$x\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r) \to Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(x)}))]$	2–пр–ло зам., 54, 50, 52
57.	$Bew_\varkappa(17\ Gen\ r)$	допущение
58.	$Bew_\varkappa(17\ Gen\ r) \equiv \exists y(y\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r))$	подст. $17\ Gen\ r$ вм. x, 6
59.	$Bew_\varkappa(17\ Gen\ r) \supset \exists y(y\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r))$	≡–удал., 58
60.	$\exists y(y\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r))$	*m.p.* , 59, 57
61.	$n\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r)$	допущение
62.	$n\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r)$	∃–удал., 60, 61
63.	$n\ B_\varkappa\ (17\ Gen\ r) \to Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(n)}))]$	подст. n вм. x, 56
64.	$Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(n)}))]$	*m.p.* , 63, 62
65.	$Bew_\varkappa(17\ Gen\ r) \to Bew_\varkappa(Sb(r^{17}_{Z(n)}))$	пр–ло логики
66.	$Bew_\varkappa(Sb(r^{17}_{Z(n)}))$	*m.p.* , 65, 57
67.	$Bew_\varkappa(Sb(r^{17}_{Z(n)}))\ \&\ Bew_\varkappa[Neg\ (Sb(r^{17}_{Z(n)}))]$	&–введение, 64, 66, **противоречие**
68.	$\overline{Bew_\varkappa(17\ Gen\ r)}$	удаление допущения 57

[32]Gödel K. Op. cit., p. 96.

69.	$Bew_{\varkappa}(Neg\ (17\ Gen\ r))$	допущение
70.	$Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \equiv \exists n(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))$	подст. n вм. y, $17\ Gen\ r$ вм. x, 6
71.	$Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \equiv \exists n(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)) \supset$ $\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)} \equiv \overline{\exists n(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))}$	пр–ло логики
72.	$\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)} \equiv \overline{\exists n(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))}$	*m.p.* , 71, 70
73.	$\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)} \supset \overline{\exists n(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))}$	$\equiv$–удал., 72
74.	$\overline{\exists n(n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))}$	*m.p.* , 73, 68
75.	$\forall n(\overline{n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)})$	замена $\exists$ на $\forall$, 74
76.	$\overline{n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)} \rightarrow Bew_{\varkappa}[Sb(r^{17}_{Z(n)})]$	подст. n вм. x, 55
77.	$\forall n(\overline{n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)}) \rightarrow \forall n(Bew_{\varkappa}[Sb(r^{17}_{Z(n)})])$	2–$\forall$–введ., 76
78.	$\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(r^{17}_{Z(n)}))]$	*m.p.* , 77, 75
79.	$\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(r^{17}_{Z(n)}))]\ \&\ Bew_{\varkappa}(Neg\ (17\ Gen\ r))$	&–введ., 69, 78, ω–**противоречие**
80.	$\exists a\big\{\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)}))]\ \&\ Bew_{\varkappa}(Neg\ (\upsilon\ Gen\ a))\big\}$	подст. υ вм. 17, $\exists$–введ., 79
81.	${}_{\omega}consist\{\varkappa\} \supset$ $\overline{\exists a\big\{\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)}))]\ \&\ Bew_{\varkappa}(Neg(\upsilon\ Gen\ a))\big\}}$	$\equiv$–удал., 10
82.	$\overline{\exists a\big\{\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)}))]\ \&\ Bew_{\varkappa}(Neg(\upsilon\ Gen\ a))\big\}}$	*m.p.* , 81, 3
83.	$\exists a\big\{\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)}))]\ \&\ Bew_{\varkappa}(Neg(\upsilon\ Gen\ a))\big\}\ \&$ $\overline{\exists a\big\{\forall n[Bew_{\varkappa}(Sb(a^{\upsilon}_{Z(n)}))]\ \&\ Bew_{\varkappa}(Neg(\upsilon\ Gen\ a))\big\}}$	&–введ., 80, 82, **противоречие**
84.	$\overline{Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))}$	удал. доп. 69
85.	$\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)}\ \&\ \overline{Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))}$	&–введ., 68, 84, **противоречие**
86.	$Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \equiv (17\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)$	$\forall$–удал., 7, $x = 17\ Gen\ r$
87.	$Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r)) \equiv (Neg(17\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)$	$\forall$–удал., 7, $x = Neg(17\ Gen\ r)$
88.	$Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r) \equiv (17\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa) \supset$ $\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)} \equiv \overline{(17\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}$	пр–ло логики
89.	$Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r)) \equiv (Neg(17\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa) \supset$ $\overline{Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))} \equiv \overline{(Neg(17\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}$	пр–ло логики
90.	$\overline{Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)} \equiv \overline{(17\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}$	*m.p.* , 88, 86
91.	$\overline{Bew_{\varkappa}(Neg(17\ Gen\ r))} \equiv \overline{(Neg(17\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}$	*m.p.* , 89, 87
92.	$\overline{(17\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\ \&\ \overline{(Neg(17\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}$	2–пр–ло зам., 85, 90, 91
93.	$\overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\ \&\ \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}$	подст. υ вм. 17, 92
94.	$recursive(\varkappa) \supset$ $\overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\quad \&\quad \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}$	$\supset$–введ., 93, удал. доп., 1
95.	${}_{\omega}consist(\varkappa) \supset \big(recursive(\varkappa) \supset$ $\overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\quad \&\quad \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\big)$	$\supset$–введ., 94, удал. доп., 3
96.	$\big({}_{\omega}consist(\varkappa)\ \&\ recursive(\varkappa)\big) \supset$ $\overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\quad \&\quad \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}$	импортация, 95
97.	$A\ \&\ B\ \&\ C \supset A\ \&\ B$	пр–ло логики

98.	${}_{\omega}consist(\varkappa)\ \&\ recursive(\varkappa)\ \&\ recursive(r) \supset$ ${}_{\omega}consist(\varkappa)\ \&\ recursive(\varkappa)$	подст. $A = {}_{\omega}consist(\varkappa)$, $B = recursive(\varkappa)$, $C = recursive(r)$, 97
99.	$\big({}_{\omega}consist(\varkappa)\ \&\ recursive(\varkappa)\ \&\ recursive(r)\big) \supset \overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\ \ \&\ \ \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}$	транз. '$\supset$', 98, 96
100.	$\exists r\Big[\big(recursive(\varkappa)\ \&\ {}_{\omega}consist(\varkappa)\ \&\ recursive(r)\big) \supset \overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\ \&\ \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\Big]$	$\exists$–введ., 99
101.	$\forall\varkappa,\ \exists r\Big[\big(recursive(\varkappa)\ \&\ {}_{\omega}consist(\varkappa)\ \&\ recursive(r)\big) \supset \overline{(\upsilon\ Gen\ r)\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\ \&\ \overline{(Neg(\upsilon\ Gen\ r))\ \varepsilon\ Flg(\varkappa)}\Big]$	$\forall$–введ., 100

Q. E. D.

В задачу автора настоящей работы не входит тщательный анализ проведённой реконструкции. В самых кратких словах, однако, обратим внимание на несколько обстоятельств, которые являются важными для подобного анализа. И прежде, чем излагать проблемные моменты, с которыми пришлось встретиться в реконструкции доказательства, обратим внимание на следующее обстоятельство.

Во–первых, бóльшая часть проблем возникла в связи с удалением кванторов существования. Отметим, что вопрос снятия кванторов существования автора теоремы особо не заботит. Единственное, что Гёдель заявляет по поводу формул, содержащих квантификацию существования[33]:

> [...] доказательство является конструктивным, так как все экзистенциальные утверждения, входящие в доказательство, основаны на Теореме V, которая, как мы легко видели, не является противной интуиционистской точке зрения.

Во–вторых, в ходе реконструкции доказательства установлены два неявных допущения. Первое из них – $Q(x, y)$ (строка 13), второе – $Q(x, y) \leftrightarrows q(17, 19)$ (строка 24). О каждом из этих допущений мы говорили в работе, однако здесь скажем кратко о каждом из них.

Первое неявное допущение. Нужно иметь в виду несколько аспектов. *С одной стороны*, из $Q(x, y)$ получается неразрешимая формула 17 $Gen\ r$ (строки 13, 24, 43–44, 46–50) (Фр. Гвиди). *С другой стороны*, применение к этому допущению Теоремы V и утверждения (8), а

[33] Ibid., p. 100.

также обратная подстановка дефиниенса вместо дефиниендума определения отношения $Q(x, y)$ (строка 12) позволили получить импликативные отношения 39 и 42, которые будут далее модифицированы в импликативные отношения 55 и 56, без которых нет возможности доказать неразрешимость формулы 17 $Gen\ r$ (см. строки, в которых применяются эти ключевые импликации: 63 строка в первом подвыводе и строка 76 – во втором). *Наконец*, дефиниенс определения отношения $Q(x, y)$ (строка 12) противоречит допущению первого подвывода ядра доказательства $n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)$ (строка 61). Это допущение мы обсудим ниже, а в связи с указанным противоречием чрезвычайно остро стоит вопрос: не является ли противоречие в первом подвыводе ядра доказательства скрытой контрадикцией двух допущений, стоящих на строках 13 и 61? Ответ на этот вопрос требует дополнительного скрупулёзного исследования.

Допущение $n\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r)$ в первом подвыводе ядра доказательства необходимо для удаления квантора существования в формуле $\exists y(y\ B_{\varkappa}\ (17\ Gen\ r))$. Это допущение явным образом не снимается. Противоречие, которое появляется в первом подвыводе, позволяет автору доказательства опровергнуть главное допущение первого подвывода ядра доказательства $Bew_{\varkappa}(17\ Gen\ r)$ (строка 57). Однако два подряд введённых допущения и появление противоречия позволяют опровергнуть скорее второе допущение, чем первое. Здесь необходимо дополнительно ставить вопрос о том, какое из допущений привело к появлению противоречия. Соответственно, имеем два (три) варианта: *a)* к появлению противоречия привело первое, главное, допущение; первый подвывод корректен при условии, что второе допущение явным образом удалено; *b)* к появлению противоречия привело второе допущение; первый подвывод корректен при условии, что второе допущение явным образом удалено, и, главное, найдено опровержение первого допущения (тем самым оно снимается методом *ad absurdum*); (третий вариант, – *c)* к появлению противоречия привели оба допущения, – должен быть исключён, поскольку при корректном проведении рассуждения всегда существует возможность проверить, какое именно допущение является причиной появления противоречия).

Второе неявное допущение. В ходе реконструкции стало ясно, что для удаления квантора существования в формулировке Теоремы V необходимо допущение. Здесь возможны эквивалентные (для дальнейшего хода доказательства, за исключением незначительных технических преобразований на строках 24–29) варианты допущений: $Q(x, y) \leftrightarrows q(17, 19)$ и $recursive(q(17, 19))$. Первое допущение является более фундаментальным, чем второе, поэтому в реконструкции был принят именно первый вариант допущения (см. строку 24).

Без двух указанных неявных допущений доказательство становится невозможным. Эти допущения так и остаются невыявленными до конца доказательства, т. е. доказательство от них не освобождается. Это означает, что вывод результирующей формулы остаётся зависимым от неявных допущений, а сама результирующая формула является следствием этих допущений.

Наконец, *в–третьих*, второй подвывод является *зависимым* от первого подвывода. Эта зависимость приводит к следующему: если ядро доказательства начать не с первого, а со второго допущения, мы не сможем прийти к результирующему (противоречивому) результату двух подвыводов (П. Сьюбер), а значит, не сможем в целом доказать Теорему VI.